готовимся к ЕГЭ

ЕГЭ

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА к ЕГЭ-2015

Книга 1

ЛЕГИОН ТМ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»

Учебные пособия издательства «Легион» допущены к использованию в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009

Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2015

Книга 1

Учебно-методическое пособие

TM

ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2014

ББК 22.1
М 34

Рецензенты: *А. Н. Тернопол* — доцент кафедры естественно-математического образования ФГОУ АПК и ППРО, г. Москва;
О. Б. Кожевников — кандидат физико-математических наук, доцент;
Л. Л. Иванова — заслуженный учитель РФ.

Авторский коллектив:
Авилов Н. И., Войта Е. А., Дерезин С. В., Иванов С. О., Коннова Е. Г., Нужа Г. Л., Ольховая Л. С., Ольховой А. Ф., Резникова Н. М., Фридман Е. М., Ханин Д. И.

М 34 **Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015. Книга 1**: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2014. — 352 с. — (Готовимся к ЕГЭ)

ISBN 978-5-9966-0520-0

Учебно-методическое пособие предназначено для подготовки к ЕГЭ-2015 по математике. Проект **впервые состоит из двух книг**. Книга 1 содержит необходимый материал для фундаментальной подготовки к ЕГЭ по математике:

- **20 новых авторских учебно-тренировочных тестов**, составленных по актуальной спецификации ЕГЭ с учётом опыта экзамена 2014 года;
- **задачник** (около 1600 задач), предназначенный для детальной отработки разных видов тестовых заданий;
- краткий теоретический **справочник**.

Книга позволит выпускникам и абитуриентам, не обращаясь к дополнительной литературе, получить на ЕГЭ желаемый результат — от минимального количества баллов, необходимого для сдачи экзамена, до максимально возможного, практически до 100 баллов.

Издание адресовано выпускникам общеобразовательных учреждений, учителям, методистам.

Пособие является частью **учебно-методического комплекса «Математика. Подготовка к ЕГЭ»**, включающего такие книги, как «Математика. 10—11 классы. Тренажёр для подготовки к ЕГЭ: алгебра, планиметрия, стереометрия», «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015. Теория вероятностей» и др.

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0520-0 © ООО «Легион», 2014

Оглавление

2. Зак. № 6

От авторов

Проект «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015» состоит из двух книг. Данная книга является первой и предназначена для фундаментальной подготовки к предстоящему ЕГЭ по математике. Книга содержит:

- **20 новых авторских учебно-тренировочных тестов**, составленных по спецификации ЕГЭ с учётом опыта экзамена 2014 года;
- **задачник**, включающий около 1600 задач, иллюстрирующих основные идеи ЕГЭ прошлых лет, по всем разделам школьного курса математики (задачник чётко структурирован, что отражено в оглавлении);
- **краткий справочник** по элементарной математике, содержащий теоретический материал, достаточный для выполнения всех заданий данного пособия.

Ко всем вариантам даны ответы. Одновременно с данной книгой издательство выпускает **решебник**, в котором представлены подробные решения всех вариантов.

Вторая книга проекта «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015» выйдет в сентябре и будет содержать варианты тестов, написанные по новой спецификации ЕГЭ-2015 по математике.

Отметим, что варианты тестовых заданий носят, как правило, «парный» характер, то есть являются попарно подобными (так, например, подобны 5-й и 6-й варианты, 7-й и 8-й и т. д.). Это удобно для учителя, так как оптимизирует процесс подготовки. Прорешав с учащимися в классе один из нечётных вариантов, целесообразно задать на дом следующий (чётный) вариант. Задания части С первых четырёх вариантов аналогичны предложенным на экзамене в 2014 году.

Варианты в книге располагаются по возрастанию уровня сложности заданий. При этом уровень сложности и темы заданий с кратким ответом (часть В) соответствуют предлагаемым заданиям открытого банка[1].

---

[1] Доступен на сайте http://mathege.ru

Комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Перечислим книги, входящие в комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ», выпускаемый издательством «Легион»:

- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015. Книга 1.
- Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2015. Книга 1.
  Пособие содержит решения всех вариантов тестовых заданий и всех задач из раздела «Задачник» книги «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015. Книга 1».
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015. Книга 2. *Сборник авторских тестов, составленных по новой спецификации ЕГЭ, краткий теоретический справочник, сборник задач.*
- Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2015. Книга 2.
  Пособие содержит решения всех вариантов тестовых заданий и всех задач из раздела «Задачник» книги «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015. Книга 2».
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015. Учебно-тренировочные тесты.
  Сборник авторских тестов, составленных по последней спецификации ЕГЭ. Дополняет книгу «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015».
- Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2015. Учебно-тренировочные тесты.
  Книга содержит решения всех тестовых заданий пособия «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015. Учебно-тренировочные тесты».
- Математика. 10—11 классы. Тренажёр для подготовки к ЕГЭ: алгебра, планиметрия, стереометрия. *Тренажёр для подготовки к решению заданий части В ЕГЭ.*
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015. Теория вероятностей.
  Пособие охватывает все темы заданий по теории вероятностей из открытого банка и включает в себя описание различных методов решения этих заданий, а также тесты для самостоятельной работы.
- Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2015. Экспресс-подготовка. Все задания и методы их решения.
  Пособие предназначено для подготовки к выполнению заданий части В и включает в себя описание методов решения этих заданий и тесты для самостоятельной работы.

- Математика. Повышенный уровень ЕГЭ-2015 (С1, С3). Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы.
  Пособие содержит задания С1, С3 по отдельным темам, являющимся традиционными в курсе математики. По каждой теме составлено 10 вариантов, один из них приводится с решением.
- Математика. Учимся решать задачи с параметром. Подготовка к ЕГЭ: задание С5.
  Пособие позволяет осуществить подготовку к решению задач с параметром, начиная с простых и заканчивая уровнем заданий С5 ЕГЭ.
- Математика. 11-й класс. Повторение материала средней школы и подготовка к итоговой аттестации. Интенсивный курс для учителей и обучающихся.
  Пособие содержит варианты самостоятельных и контрольных работ, а также поурочное планирование для второго полугодия 11-го класса.
- Математика. 7–11 классы. Карманный справочник. *Пособие содержит необходимый справочный материал для самостоятельной подготовки к ЕГЭ по математике, а также к различным формам промежуточного контроля по алгебре и геометрии в 7–11 классах.*
- Математика. Подготовка к ЕГЭ. Тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней (С1).
- Математика. Подготовка к ЕГЭ. Задание С2. Многогранники: типы задач и методы их решений.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ. Решение задач по стереометрии методом координат (задание С2).
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: решаем С3 методом рационализации.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: задание С3. Решение неравенств с одной переменной.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: решение планиметрических задач (С4).
- Геометрия. Подготовка к ЕГЭ и ГИА-9. Учимся решать задачи и повторяем теорию.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: секреты оценки заданий части С. Решения и комментарии.

- Математика. Подготовка к ЕГЭ. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: математический бой. Задания частей В и С.

Авторы благодарят рецензентов за полезные замечания и пожелания, связанные с данным изданием. Замечания и пожелания просим направлять по адресу: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550, тел. (863) 303-05-50, 248-14-03, e-mail: legionrus@legionrus.com.

Обсудить пособия, задать вопросы можно на официальных форумах издательства:
http://f.legionr.ru,
http://legion-posobiya.livejournal.com

Следите за дополнениями и методическими рекомендациями на сайте издательства **http://legionr.ru** в связи с возможными изменениями спецификаций экзаменационных работ, разрабатываемых ФИПИ (доступ к материалам свободный).

В 2007—2008 годах Экспертным советом Федерального института педагогических измерений (ФИПИ) изданиям «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2008» и «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2009» были присвоены грифы «Допущено к использованию в образовательных учреждениях Российской Федерации в качестве учебного пособия». С 2009 года допуск учебных пособий к использованию в образовательном процессе осуществляет Минобрнауки РФ. Издательство «Легион» Приказом Минобрнауки РФ № 729 от 14.12.2009 г. включено в перечень организаций, осуществляющих издание пособий для учащихся.

Краткий теоретический справочник

Предлагаемый справочник содержит основные результаты и формулы, предусмотренные действующей программой для общеобразовательных учреждений. В основу отбора материала положен курс B, по которому разрабатывались КИМы 2002 – 2014 годов. Однако, как при подготовке к ЕГЭ, так и при его сдаче, учащимся понадобятся сведения, которые требуют значительных усилий при их доказательстве, выводе, исследовании. Они не входят в нормативные рамки курса B, но большинство из них включено в курс углублённого изучения математики и отмечено звёздочкой (*).

§ 1. Условные обозначения

При изложении теоретического материала, содержащегося в этой главе, мы будем пользоваться следующими общепринятыми математическими обозначениями.

N — множество всех натуральных чисел.

N_0 — множество всех неотрицательных целых чисел.

Z — множество всех целых чисел.

Q — множество всех рациональных чисел.

R — множество всех действительных (вещественных) чисел.

R^+ — множество всех положительных действительных чисел.

$\Rightarrow$ — следует.

$\Leftrightarrow$ — равносильно; эквивалентно; тогда и только тогда.

$\stackrel{\text{def}}{=}$ — по определению равно.

$D(f)$ — область определения функции $y = f(x)$.

$E(f)$ — множество (область) значений функции $y = f(x)$.

const — постоянная величина.

$\in$ — принадлежит, содержится; например:

$x \in R$ — x принадлежит множеству действительных чисел, то есть x является действительным числом.

$n \;\vdots\; m$ (для $n, m \in Z$) — число n делится нацело на число m.

§ 2. Степени и корни

Определение степени и корня

1. Пусть $a \in R, n \in N$. Тогда

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ сомножителей}};$$

$$a^0 \overset{\text{def}}{=} 1, \quad \text{если } a \neq 0;$$

$$a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}, \text{ если } a \neq 0;$$

$$0^0 \text{ не определено};$$

$$\sqrt[n]{a} \overset{\text{def}}{=} b \Leftrightarrow b^n = a \text{ и } b \geqslant 0 \text{ при } n \text{ чётном};$$

$$\sqrt[n]{a} \overset{\text{def}}{=} b \Leftrightarrow b^n = a \text{ при } n \text{ нечётном}.$$

2. Пусть $a \in R^+$; $m \in Z, n \in N, n > 1$. Тогда

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}.$$

Правила действий с радикалами

Пусть $m, n, k \in N, m, n > 1;\ a, b \in R^+$. Тогда

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \qquad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}; \qquad \sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}.$$

Правила действий со степенями

Пусть $p, q \in Q,\ a, b \in R^+$. Тогда

$$a^p a^q = a^{p+q}; \qquad (a^p)^q = a^{pq};$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}; \qquad (ab)^p = a^p b^p.$$

Не приводя определения степени с действительным показателем, отметим, что правила действий с такими степенями «сохраняются», то есть приведённые правила верны и для $p,\ q \in R$.

Формулы сокращённого умножения

Пусть $a, b \in R$. Тогда

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Таблица квадратов

$11^2 = 121$	$16^2 = 256$	$21^2 = 441$	$26^2 = 676$
$12^2 = 144$	$17^2 = 289$	$22^2 = 484$	$27^2 = 729$
$13^2 = 169$	$18^2 = 324$	$23^2 = 529$	$28^2 = 784$
$14^2 = 196$	$19^2 = 361$	$24^2 = 576$	$29^2 = 841$
$15^2 = 225$	$20^2 = 400$	$25^2 = 625$	$30^2 = 900$

§ 3. Модуль и его свойства

1. Определение модуля числа.

$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -x, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad |x| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

2. Геометрически $|x|$ есть расстояние от точки x числовой оси до начала отсчёта — точки O.

3. $|x - a|$ есть расстояние между точками x и a числовой оси.

4. Модуль произведения, частного и степени.

$$|xy| = |x| \cdot |y|; \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \ y \neq 0; \quad {}^*|x^n| = |x|^n, n \in Z, \left[\begin{array}{l} x \neq 0, \\ n > 0. \end{array}\right.$$

5. $\sqrt{x^2} = |x|$.

§ 4. Прогрессии

Арифметическая прогрессия

1. Если a_n есть n-й член, d — разность и S_n — сумма n первых членов арифметической прогрессии, то

$$a_{n+1} = a_n + d, a_n = a_1 + d(n-1),$$
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}.$$

Арифметическая прогрессия возрастает, если $d > 0$, и убывает, если $d < 0$.

2*. Если a_k, a_l, a_m, a_n — члены арифметической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $a_k + a_l = a_m + a_n$.

3. Каждый член арифметической прогрессии, отличный от первого и последнего, равен среднему арифметическому соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрическая прогрессия

1. Если b_n есть n-й член, q — знаменатель и S_n — сумма n первых членов геометрической прогрессии, то

$$b_{n+1} = b_n q, b_1 \neq 0, q \neq 0; \qquad b_n = b_1 q^{n-1},$$
$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1.$$

2*. Если b_k, b_l, b_m, b_n — члены геометрической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $b_k \cdot b_l = b_m \cdot b_n$.

3. Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, отличного от первого и последнего, равен произведению соседних с ним членов:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($|q| < 1$), то $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

§ 5. Логарифмы

Определение логарифма

Логарифмом положительного числа x по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени y, в которую нужно возвести a, чтобы получить число x: $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.

Свойства логарифмов

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$.

1. Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a x} = x, \text{ для } x > 0.$$

2. Логарифм произведения, частного и степени:

$$\log_a(xy) = \log_a |x| + \log_a |y|, xy > 0;$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a |x| - \log_a |y|, xy > 0;$$
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, x > 0, y > 0;$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, x > 0, y > 0;$$
$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, x > 0;$$
$$\log_a x^k = k \log_a |x|, k \text{ — чётное целое.}$$

3. Формула перехода к новому основанию. Пусть $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$. Тогда

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \text{ в частности } \log_a x = \frac{1}{\log_x a}, \text{ при } x \neq 1.$$

Кроме того, $\log_a x \log_b y = \log_a y \log_b x$.

4. Пусть $b > 0$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, тогда

$$\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b, p \neq 0;$$

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_{|a|} b, k \neq 0, k \text{ — чётное целое.}$$

5*. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

При решении задач бывает полезна следующая теорема.

Если числа a и b на числовой оси расположены по одну сторону от единицы, то $\log_a b > 0$, а если по разные, то $\log_a b < 0$.

§ 6. Теория вероятностей

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных для A исходов к числу всех равновозможных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n — общее число равновозможных исходов, m — число исходов, благоприятствующих событию A.

Противоположные события

Событие, противоположное событию A, обозначают $\overline{A}$. При проведении испытания всегда происходит ровно одно из двух противоположных событий и

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1; \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Объединение несовместных событий

Два события A и B называют несовместными, если отсутствуют исходы, благоприятствующие одновременно как событию A, так и событию B.

Событие C называют объединением событий A и B (пишут $C = A \cup B$), если событие C означает, что произошло хотя бы одно из событий A и B.

Если события A и B несовместны, то вероятность их объединения равна сумме вероятностей событий A и B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Пересечение независимых событий

Два события A и B называют независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от появления или непоявления другого события.

Событие C называют пересечением событий A и B (пишут $C = A \cap B$), если событие C означает, что произошли оба события A и B.

Если события A и B независимы, то вероятность их пересечения равна произведению вероятностей событий A и B:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

§ 7. Тригонометрия

Радианное измерение углов

Один радиан равен центральному углу окружности, длина дуги которого равна радиусу этой окружности.

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''.$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радиана} \approx 0,017453 \text{ радиана}.$$

Углы в градусах	φ°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Углы в радианах	$\frac{\pi}{180^\circ} \cdot \varphi^\circ$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \qquad \mathrm{tg}\,x \cdot \mathrm{ctg}\,x = 1;$$
$$1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad 1 + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Формулы суммы и разности аргументов

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y;$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y;$$
$$\mathrm{tg}(x \pm y) = \frac{\mathrm{tg}\,x \pm \mathrm{tg}\,y}{1 \mp \mathrm{tg}\,x \cdot \mathrm{tg}\,y}.$$

Формулы двойного и тройного аргументов

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1;$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x;$$
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$$
$$^{*}\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x; \qquad ^{*}\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x;$$
$$\mathrm{tg}\,2x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1 - \mathrm{tg}^2 x}; \qquad ^{*}\mathrm{tg}\,3x = \frac{3\,\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}^3 x}{1 - 3\,\mathrm{tg}^2 x}.$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

Если $x \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$, то

$$^*\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \qquad ^*\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin x \pm \sin y = 2\cdot\sin\frac{x\pm y}{2}\cdot\cos\frac{x\mp y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{y-x}{2};$$

$$^*\sin x + \cos y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}\right);$$

$$^*\sin x - \cos y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}+\frac{\pi}{4}\right);$$

$$^*\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cdot\cos y};$$

$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi)$, где $a^2+b^2 \neq 0$, а φ определяется из формулы $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(x-\alpha)$, где $a^2+b^2 \neq 0$, а α определяется из формулы $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin x\cdot\sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y)-\cos(x+y)\big);$$

$$\cos x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y)+\cos(x+y)\big);$$

$$\sin x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y)+\sin(x+y)\big).$$

Определение обратных тригонометрических функций

$y \overset{\text{def}}{=} \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$;

$y \overset{\text{def}}{=} \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$ и $0 \leqslant y \leqslant \pi$;

$y \overset{\text{def}}{=} \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y$ и $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$;

$y \overset{\text{def}}{=} \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y$ и $0 < y < \pi$.

***Свойства обратных тригонометрических функций**

$D(\arcsin x) = [-1; 1]$; $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

$D(\arccos x) = [-1; 1]$; $E(\arccos x) = [0; \pi]$;

$D(\operatorname{arctg} x) = R$; $E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

$D(\operatorname{arcctg} x) = R$; $E(\operatorname{arcctg} x) = \Big(0; \pi\Big)$;

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$; $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;

$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$; $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$;

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, если $x \in [-1; 1]$;

$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$;

$\sin(\arcsin x) = x$, если $x \in [-1; 1]$;

$\arcsin(\sin x) = x_0$, где $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin x_0 = \sin x$;

$\cos(\arccos x) = x$, если $x \in [-1; 1]$;

$\arccos(\cos x) = x_0$, где $x_0 \in [0; \pi]$ и $\cos x_0 = \cos x$;

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$;

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x_0$, где $x_0 = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} x_0 = \operatorname{tg} x$;

$\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = x_0$, где $x_0 \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg} x_0 = \operatorname{ctg} x$.

$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$; $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$;

$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$; $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$;

$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$; $\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Некоторые значения обратных тригонометрических функций

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	π

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Формулы для решения простейших тригонометрических уравнений

$\sin x = a; \quad |a| \leqslant 1; x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in Z;$

$\sin x = 0; \quad x = \pi k; k \in Z;$

$\sin x = 1; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in Z;$

$\sin x = -1; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in Z;$

$\cos x = a; |a| \leqslant 1; \ x = \pm \arccos a + 2\pi n, \ n \in Z;$

$\cos x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in Z;$

$\cos x = 1; \quad x = 2\pi k; k \in Z;$

$\cos x = -1; x = \pi + 2\pi k; k \in Z;$

$\operatorname{tg} x = a; \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n; n \in Z;$

$\operatorname{ctg} x = a; \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n; n \in Z.$

§ 8. Многочлены и их корни

Определение многочлена

Многочленом степени n ($n \in N_0$) называется всякое выражение вида

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in R$ и $a_n \neq 0$.

Всякое вещественное число, отличное от нуля, принято трактовать как многочлен нулевой степени. Числа $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ называются коэффициентами многочлена, a_n — старший коэффициент, a_0 — свободный член.

Число x_0 называется корнем многочлена $f(x)$, если $f(x_0) = 0$.

Квадратный трёхчлен

Квадратный трёхчлен — это многочлен степени 2:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Если x_1, x_2 — корни $f(x)$, то $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad \textbf{(Теорема Виета)}.$$

Если второй коэффициент делится на 2, то есть

$f(x) = ax^2 + 2kx + c$, то $x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

Если старший коэффициент равен 1, то есть $f(x) = x^2 + px + q$,

то $x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Выражение $b^2 - 4ac$ называется дискриминантом соответствующего многочлена $f(x)$ (уравнения $f(x) = 0$). Дискриминант принято обозначать большой буквой D. Отметим, что $D = 0 \Leftrightarrow k^2 - ac = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q = 0$.

***Теорема Безу и схема Горнера**

Для любого многочлена степени $n > 0$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

и любого числа $x_0 \in R$ найдётся такой многочлен степени $n - 1$

$$q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

что справедливо равенство

$$f(x) = (x - x_0)\, q(x) + f(x_0) \quad \textbf{(Теорема Безу)},$$

причём коэффициенты $q(x)$ могут быть вычислены по следующему алгоритму:

$$b_{n-1} = a_n, \quad b_{n-2} = x_0 b_{n-1} + a_{n-1},$$
$$b_{n-3} = x_0 b_{n-2} + a_{n-2}, \ldots, \; b_{i-1} = x_0 b_i + a_i, \ldots$$
$$\ldots, \; b_1 = x_0 b_2 + a_2, \; b_0 = x_0 b_1 + a_1, \; f(x_0) = x_0 b_0 + a_0.$$

Результаты вычисления коэффициентов многочлена $q(x)$ удобно помещать в таблицу **(схему Горнера)**.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_{i+1}	a_i	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
x_0	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_i	b_{i-1}	$\cdots$	b_1	b_0	$f(x_0)$

Понятно, что если x_0 — корень многочлена $f(x)$, то $f(x_0) = 0$ и, следовательно,

$$f(x) = (x - x_0)\,q(x) \quad \textbf{(следствие из теоремы Безу).}$$

Таким образом, чтобы выяснить, является ли число x_0 корнем многочлена $f(x)$, нужно заполнить приведённую выше таблицу (схему Горнера). Если $f(x_0)$ окажется равным 0, то x_0 — корень. В противном случае x_0 — не корень $f(x)$.

Приведём еще одну теорему о многочленах и следствие из неё, касающееся рациональных корней многочлена.

Теорема. Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Если несократимая дробь (рациональное число) p/q является корнем многочлена $f(x)$, то

1) $a_n \vdots q$;

2) $a_0 \vdots p$.

Следствие. Пусть $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда все рациональные корни многочлена $f(x)$ являются целыми и являются делителями свободного члена a_0.

Эти теоремы будут очень полезными при выполнении некоторых заданий части В и части С, их использование существенно экономит время решения.

Пример 1. Найдите целые корни уравнения $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$.

Решение. По следствию целые корни находятся среди делителей свободного члена: ± 1; ± 2. Проверяем по схеме Горнера каждое из этих чисел.

	1	3	1	−3	−2	
1	1	4	5	2	0	корень
1	1	5	10	12		не корень (не кратный корень)
−1	1	3	2	0		корень
−1	1	2	0			корень (кратности 2)

$x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = (x-1)(x+1)^2(x+2)$.

Данное уравнение имеет 3 корня: 1; −1; −2, причём −1 — корень кратности 2.

Пример 2. Решите уравнение $6x^4 + 17x^3 + 20x^2 + 14x + 3 = 0$.

Решение. По теореме все рациональные корни уравнения находятся среди чисел $\frac{p}{q}$, где $6 \vdots q$, $3 \vdots p$.

Делители 3: ± 1; ± 3.

Делители 6: ± 1; ± 2; ± 3; ± 6.

Числа вида $\frac{p}{q}$: ± 1; $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{1}{3}$; $\pm\frac{1}{6}$; ± 3; $\pm\frac{3}{2}$.

Видим, что корнями могут быть лишь отрицательные числа. Поэтому проверяем числа -1; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{6}$; -3; $-\frac{3}{2}$.

	6	17	20	14	3	
-1	6	11	9	5	-2	не корень
$-\frac{1}{2}$	6	14	13	$\frac{15}{2}$	$-\frac{3}{4}$	не корень
$-\frac{1}{3}$	6	15	15	9	0	корень

Данное уравнение эквивалентно $\left(x + \frac{1}{3}\right)(6x^3 + 15x^2 + 15x + 9) = 0$.

$x_1 = -\frac{1}{3}$; $2x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = 0$.

Делители 3: ± 1; ± 3.

Делители 2: ± 1; ± 2.

Числа вида $\frac{p}{q}$: ± 1; $\pm\frac{1}{2}$; ± 3; $\pm\frac{3}{2}$.

Корнями могут быть лишь отрицательные числа, причём -1 и $-\frac{1}{2}$ не являются корнями (проверили выше).

Проверяем числа -3; $-\frac{3}{2}$.

	2	5	5	3	
-3	2	-1	8	-21	не корень
$-\frac{3}{2}$	2	2	2	0	корень

Данное уравнение эквивалентно $\left(x+\frac{3}{2}\right)(2x^2+2x+2)=0$, $x_2=-\frac{3}{2}$, $x^2+x+1=0$ — корней нет.

Ответ: $-\frac{1}{3}$; $-\frac{3}{2}$.

§ 9. Уравнения

Уравнения с одним неизвестным

Напомним, что в соответствии с [1], *уравнением* называется равенство, содержащее неизвестное, обозначаемое буквой. Пользуясь понятием функции, можно сказать, что *уравнение* (с одним неизвестным) — это пара функций от одной и той же переменной x, соединённых знаком равенства:

$$f(x)=g(x).$$

Областью допустимых значений (ОДЗ) данного уравнения называется пересечение области определения функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$D(f)\cap D(g).$$

Число a называется *корнем (или решением)* данного уравнения, если при подстановке в уравнение вместо каждого вхождения x числа a уравнение обращается в верное числовое равенство: $f(a)=g(a)$.

Существуют эквивалентные определения корня уравнения, в которых требуется принадлежность числа a ОДЗ исходного уравнения.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что данное уравнение корней не имеет. Отметим, что если мы нашли подбором какие-то корни уравнения и доказали, что других корней у данного уравнения быть не может, то тем самым мы уравнение решили.

Два уравнения называются *равносильными,* если множества их корней совпадают. Уравнение A является *следствием* уравнения B, если все корни уравнения B являются корнями уравнения A (но, быть может, среди корней уравнения A есть такие, которые не являются корнями B).

Преобразование уравнения называется *равносильным,* если преобразуемое уравнение равносильно исходному.

1. Если при решении уравнения вы производили лишь равносильные преобразования, то для найденных корней нет нужды делать проверку.

2. Если вы нашли ОДЗ и в пределах ОДЗ производили равносильные преобразования уравнения, то проверку также делать не нужно, но необходимо выяснить, входят ли найденные корни в ОДЗ.

3. Если не все преобразования были равносильными, но каждое уравнение было следствием предыдущего, то необходимо сделать проверку.

Отметим, что очень часто находить ОДЗ нецелесообразно, если экономнее (по времени) найти «корни» (среди которых, быть может, есть лишние) и сделать проверку.

Всё сказанное в отношении проверки справедливо с чисто математической точки зрения. То есть, если все ваши преобразования были равносильны, то приводить в конце решения проверку нет необходимости. И в этом случае (при наличии соответствующей оговорки) ваше решение будет смотреться более грамотным с точки зрения математики.

Но совсем иное дело, если речь идёт о самоконтроле. Здесь мы рекомендуем делать в некоторых случаях не одну, а несколько проверок.

*Полезные неравенства

Отметим, что при решении уравнений (и неравенств) иногда бывают полезны следующие неравенства, истинные для $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$:

$$a \leqslant \frac{a^2+1}{2}; \quad \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}; \quad \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Равенства достигаются при $a = b$ (в первом случае при $a = 1$).

Полезны также некоторые их следствия:

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2 \text{ при } a > 0; \quad a + \frac{1}{a} \leqslant -2 \text{ при } a < 0.$$

Равенства достигаются при $a = 1$ в первом случае и при $a = -1$ во втором.

Системы уравнений с двумя неизвестными

Уравнением с двумя неизвестными x и y называется пара функций от двух переменных (x и y), соединённых знаком равенства:

$$f(x, y) = g(x, y).$$

Решением такого уравнения называется всякая пара чисел (x_0, y_0), подстановка которых в уравнение вместо соответствующих неизвестных обращает это уравнение в верное числовое равенство.

Системой двух уравнений с двумя неизвестными называется пара уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} f(x, y) = g(x, y), \\ h(x, y) = t(x, y). \end{cases}$$

Решением системы называется всякая пара чисел (x_0, y_0), являющаяся решением и первого, и второго уравнений системы.

Решить систему — это значит найти все её решения или доказать, что система решений не имеет.

Системы линейных уравнений

Пусть дана система $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$

1. Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

2. Система имеет бесконечное множество решений тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a_1b_2 - a_2b_1 = 0, \\ a_1c_2 - a_2c_1 = 0, \\ b_1c_2 - b_2c_1 = 0. \end{cases}$$

3. Система не имеет решений тогда и только тогда, когда $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, но $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ или $b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0$.

§ 10. Неравенства

Неравенства и системы неравенств

Неравенством с одним неизвестным называется пара функций от одной и той же переменной, соединённая одним из знаков: $>$, $\geqslant$, $<$, $\leqslant$, $\neq$.

Решением неравенства (системы неравенств) называется всякое действительное число, подстановка которого в неравенство (каждое неравенство системы) вместо каждого вхождения неизвестного (переменной) обращает это неравенство (все неравенства системы) в верное числовое неравенство (верные числовые неравенства).

Решить неравенство (систему неравенств) значит найти множество всех решений этого неравенства (этой системы неравенств) или доказать, что оно (она) решений не имеет. Два неравенства (две системы неравенств) называются *равносильными,* если множества их решений совпадают. Соответственно, преобразования неравенства называются *равносильными*, если при этих преобразованиях множество решений полученного неравенства совпадает с множеством решений исходного неравенства.

Отметим, что проверка правильности всех найденных решений неравенства подстановкой в исходные неравенства в подавляющем большинстве случаев невозможна. Поэтому при решении неравенств (систем неравенств) нужно пользоваться равносильными преобразованиями (равносильными преобразованиями в рамках ОДЗ). Нахождение ОДЗ не обязательно, если вы пользуетесь исключительно равносильными преобразованиями. В противном случае нахождение ОДЗ обязательно. При этом возможны два подхода к оформлению решения:

1. ОДЗ в виде неравенства или системы неравенств присоединяют к данному неравенству (данной системе) и полученную систему решают.

2. Находят ОДЗ. Решают данное неравенство (систему неравенств), пользуясь лишь равносильными преобразованиями в рамках ОДЗ. Из полученных решений удаляют те, которые не входят в ОДЗ.

Объединение неравенств

Отметим также, что очень часто решениями данного неравенства (системы неравенств) является объединение решений двух или более неравенств (систем неравенств). В таких случаях мы будем употреблять запись вида $\left[\begin{array}{l} f(x) \geqslant g(x), \\ h(x) < u(x). \end{array}\right.$

Эту запись будем называть *объединением* неравенств. Решением объединения двух неравенств является всякое число, являющееся решением хотя бы одного из двух неравенств объединения. Иначе говоря, для решения объединения нужно найти множества всех решений первого и второго неравенств и найденные множества объединить.

Рациональные неравенства

Рациональным называется всякое неравенство, сводящееся к неравенству вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$ или вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0$, где $P(x)$, $Q(x)$ — некоторые многочлены.

Поскольку $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) > 0$,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} P(x) \cdot Q(x) \geqslant 0, \\ Q(x) \neq 0, \end{array}\right.$$

то для решения рациональных неравенств удобно применять метод интервалов.

Пример. Решите неравенство $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 3} + \dfrac{6x - 9}{x + 1} \leqslant 1$.

Решение. $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 3} + \dfrac{6x - 9}{x + 1} - 1 \leqslant 0$,

$$\frac{(x^2 - 7x + 10)(x + 1) + (6x - 9)(x - 3) - (x - 3) \cdot (x + 1)}{(x - 3)(x + 1)} \leqslant 0,$$

$\dfrac{x^3 - x^2 - 22x + 40}{(x-3)\cdot(x+1)} \leqslant 0$. Числитель последней дроби разложим на множители. Подбором находим, что $x = 2$ является корнем многочлена $x^3 - x^2 - 22x + 40$; разделив данный многочлен (уголком или по схеме Горнера) на $x - 2$, получаем $x^3 - x^2 - 22x + 40 = (x-2)\cdot(x^2 + x - 20) = (x-2)\cdot(x-4)\cdot(x+5)$. Значит, исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (x-2)\cdot(x-4)\cdot(x+5)\cdot(x-3)\cdot(x+1) \leqslant 0, \\ (x-3)\cdot(x+1) \neq 0. \end{cases}$$

Решая первое неравенство этой системы методом интервалов (см. рис. 1) и выкалывая точки $x = -1$, $x = 3$, получаем ответ

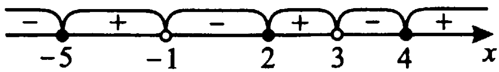


Рис. 1.

$x \in (-\infty; -5] \cup (-1; 2] \cup (3; 4]$.

§ 11. Функции

Область определения функции

Областью определения $D(y)$ *функции* $y = f(x)$ называется множество всех значений аргумента x, для которых выражение $f(x)$ определено (имеет смысл). Например, рассматривается функция $y = \sin x$ на отрезке $[0;\ \pi]$. В данном случае $D(y) = [0;\ \pi]$, так как данной фразой функция $y = \sin x$ определена лишь на отрезке $[0;\ \pi]$. Если же рассматривается функция $y = \sin x$ без каких-либо оговорок, то это означает, что $D(y) = R$. В этом случае говорят также, что функция $y = \sin x$ определена на всей числовой прямой. С другой стороны, пусть рассматривается функция $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$. В данной фразе также нет каких-либо оговорок относительно того, на каком числовом промежутке рассматривается функция. Вместе с тем мы видим, что эта функция не определена для $x < 1$, так как при $x < 1$ под корнем будет отрицательное число. Эта функция также не определена при $x = \pm 2$, так как при $x = \pm 2$ знаменатель обращается в нуль. Таким образом, для данной функции $D(y) = [1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

Напомним области определения основных элементарных функций. Область определения любого многочлена — R.

$D\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. $D\left(\sqrt[2k]{x}\right) = [0;\ +\infty)$.

$D\left(\sqrt[2k+1]{x}\right) = R$. $D(\log_a x) = (0;\ +\infty)$.

$D(\sin x) = D(\cos x) = R$. $D(a^x) = R$.

$^*D(\arcsin x) = D(\arccos x) = [-1;\ 1]$.

$^*D(\operatorname{arctg} x) = D(\operatorname{arcctg} x) = R$.

$D(\operatorname{tg} x) = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3}{2}\pi + 2\pi k\right),\ k \in Z$.

Или $D(\operatorname{tg} x):\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\quad k \in Z$.

$D(\operatorname{ctg} x) = (2\pi k; \pi + 2\pi k) \cup (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k),\quad k \in Z$.

Или $D(\operatorname{ctg} x):\ x \neq \pi k,\quad k \in Z$.

Множество значений функции

Множеством (областью) значений $E(y)$ функции $y = f(x)$ называется множество всех таких чисел y_0, для каждого из которых найдётся такое число x_0, что $f(x_0) = y_0$.

Напомним области значений основных элементарных функций.

Областью значений всякого многочлена чётной степени является промежуток $[m;\ +\infty)$, где m — наименьшее значение этого многочлена, либо промежуток $(-\infty;\ n]$, где n — наибольшее значение этого многочлена.

Областью значений всякого многочлена нечётной степени является R.

$E\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. $E\left(\sqrt[2k]{x}\right) = [0;\ +\infty)$.

$E\left(\sqrt[2k+1]{x}\right) = R$. $E(a^x) = (0;\ +\infty)$.

$E(\log_a x) = R$. $E(\sin x) = E(\cos x) = [-1;\ 1]$.

$^*E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. $^*E(\arccos x) = [0;\ \pi]$.

$E(\operatorname{tg} x) = E(\operatorname{ctg} x) = R$. $^*E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

$^*E(\operatorname{arcctg} x) = (0;\ \pi)$.

Отметим, что задания на нахождение множества значений какой-то функции решаются преимущественно двумя методами: аналитическим и алгебраическим.

Приведём одно *замечание*. Предположим, что функция $f(x)$ является сложной функцией, в которой можно выделить «подфункцию» $t = t(x)$.

Тогда $y = f(t) = f\big(t(x)\big)$. Отметим, что неважно, какой является функция $t = t(x)$ (возрастающей, возрастающе-убывающей и т. д.). Если нам известна её область значений $E(t)$, то при нахождении области значений функции $y = f(t) = f\big(t(x)\big)$ целесообразно считать, что t возрастает на $E(t)$ как какой-то новый аргумент. В соответствии с этим функцию $y = f(t)$ целесообразно считать такой, каковой она является от аргумента t на промежутке $E(t)$. Например, пусть нам дана функция $y = 2\cos x + 1$. Вводим новую переменную $t(x) = \cos x$. Понятно, что $E(t) = [-1;\ 1]$. Тогда функцию $y(t) = 2t + 1$ целесообразно считать линейной на промежутке $[-1;\ 1]$. Это никак не повлияет на нахождение $E(y)$, но, напротив, облегчит нам эту процедуру. Находим $E(y)$. Функция $y(t) = 2t + 1$ на промежутке $[-1;\ 1]$ является линейной и возрастающей, поэтому $E(y) = [2(-1) + 1;\ 2 \cdot 1 + 1] = [-1;\ 3]$.

При решении задач аналитическим методом будем пользоваться следующими фактами.

1. Пусть $f(x)$ — какая-то функция и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, где a — какое-то число или $a = +\infty$, или $a = -\infty$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, причём при значениях x, достаточно близких к a, величина $\dfrac{1}{f(x)}$ будет достаточно близкой к нулю, но вместе с тем больше нуля. В этом случае мы будем говорить, что величина $\dfrac{1}{f(x)}$ стремится к нулю справа при x, стремящемся к a: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +0$. В этом смысле будем употреблять запись $\dfrac{1}{+\infty} = +0$.

2. В аналогичном смысле будем употреблять также запись вида $\dfrac{1}{-\infty} = -0$.

3. Пусть теперь $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, причём при всех x, достаточно близких к a, функция $f(x) > 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$. Этот факт мы будем записывать иногда в виде $\dfrac{1}{+0} = +\infty$.

4. В подобном же смысле мы будем употреблять запись $\dfrac{1}{-0} = -\infty$.

5. Ниже мы приводим записи, которые будем в дальнейшем использовать, но понимать эти записи следует не в буквальном смысле. Фактический смысл этих записей вам предлагается привести самим.

$$a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty \text{ при } a > 1, \\ +0 \text{ при } 0 < a < 1; \end{cases} \quad a^{-\infty} = \begin{cases} +0 \text{ при } a > 1, \\ +\infty \text{ при } 0 < a < 1; \end{cases}$$

$$\log_a(+0) = \begin{cases} -\infty \text{ при } a > 1, \\ +\infty \text{ при } 0 < a < 1; \end{cases} \quad \log_a(+\infty) = \begin{cases} +\infty \text{ при } a > 1, \\ -\infty \text{ при } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Чётность и нечётность функции

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$. График чётной функции симметричен относительно оси Oy.

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Графики элементарных функций. На рисунках 2–7 изображены графики основных элементарных функций.

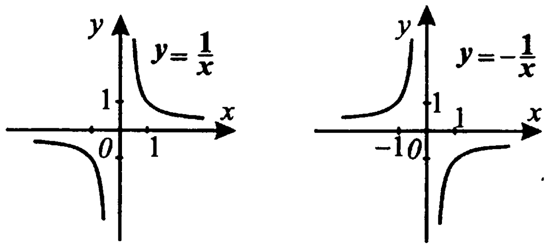


Рис. 2.

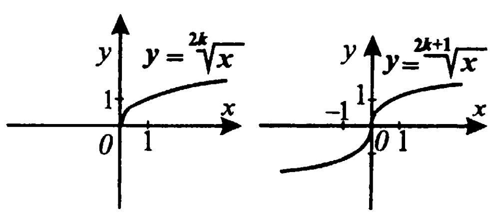


Рис. 3.

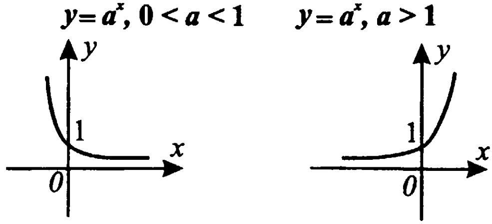


Рис. 4.

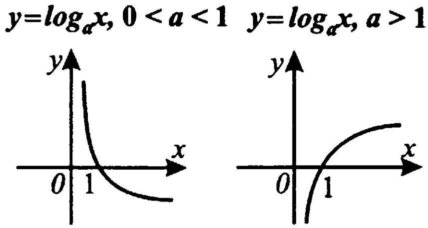


Рис. 5.

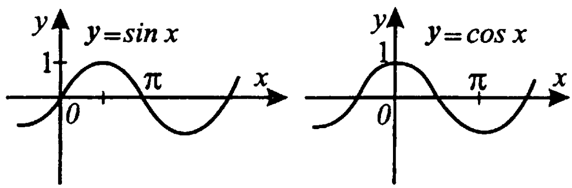


Рис. 6.

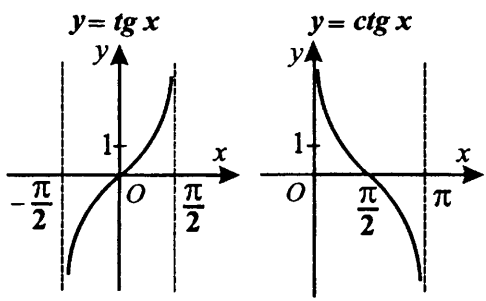


Рис. 7.

Построение графиков функций «механическими» преобразованиями

График функции $y = -f(x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Ox (см. рис. 8).

График функции $y = f(-x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Oy (см. рис. 9).

3. Зак. № 6

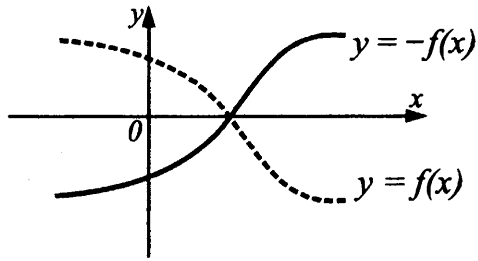


Рис. 8.

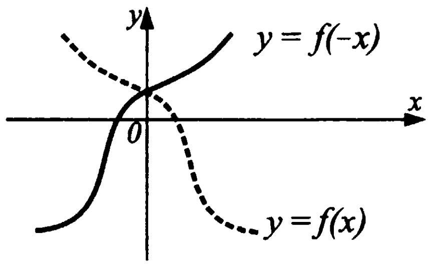


Рис. 9.

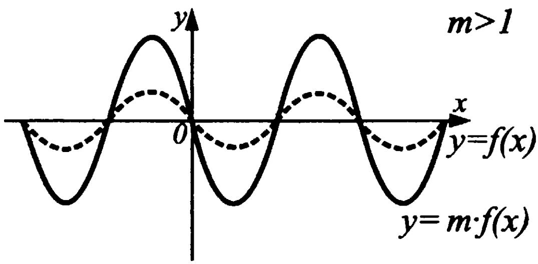


Рис. 10.

График функции $y = m \cdot f(x)$, $m > 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в m раз вдоль оси Oy от оси Ox (см. рис. 10).

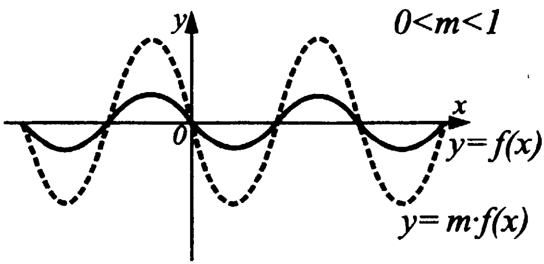


Рис. 11.

График функции $y = m \cdot f(x)$, $0 < m < 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в $\frac{1}{m}$ раз вдоль оси Oy к оси Ox (см. рис. 11).

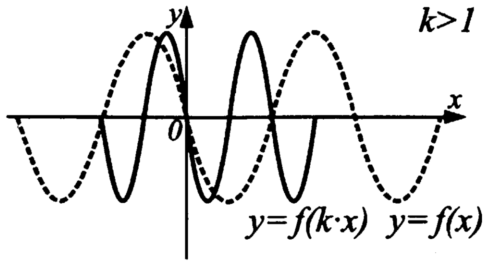


Рис. 12.

График функции $y = f(kx)$, $k > 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в k раз к оси Oy вдоль оси Ox (см. рис. 12).

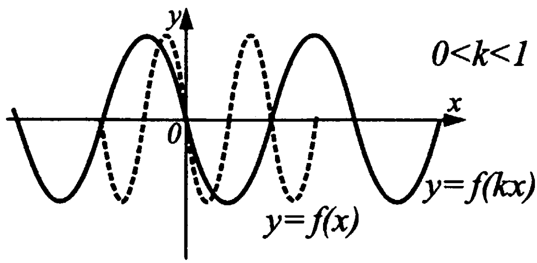


Рис. 13.

График функции $y = f(kx)$, $0 < k < 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в $\frac{1}{k}$ раз от оси Oy вдоль оси Ox (см. рис. 13).

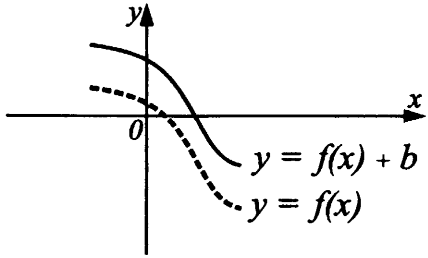


Рис. 14.

График функции $y = f(x) + b$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вверх на число b при $b > 0$ и сдвигом вниз на число $(-b)$ при $b < 0$ (см. рис. 14).

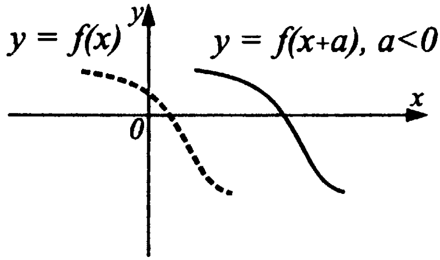


Рис. 15.

График функции $y = f(x + a)$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вправо на число $-a$ при $a < 0$ и сдвигом влево на число a при $a > 0$ (см. рис. 15).

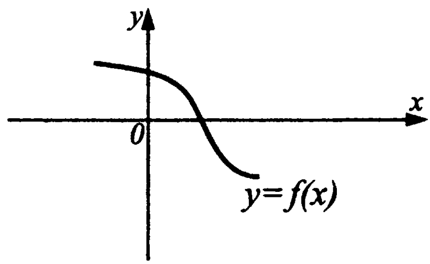


Рис. 16.

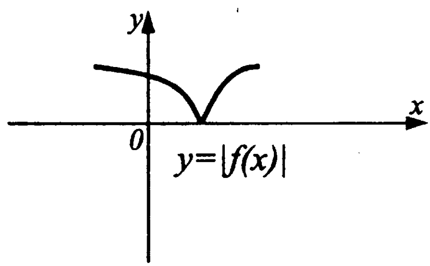


Рис. 17.

График функции $y = |f(x)|$ (см. рис. 17) получен из графика функции $y = f(x)$ (см. рис. 16) отражением относительно оси Ox части этого графика, лежащей ниже оси Ox.

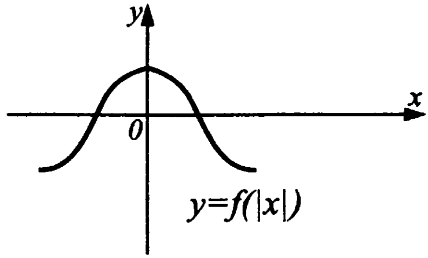


Рис. 18.

График функции $y = f(|x|)$ (см. рис. 18) получен из графика функции $y = f(x)$ (см. рис. 16) объединением части этого графика, лежащей правее оси Oy, с её отражением относительно оси Oy и удалением части, лежащей левее оси Oy.

Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и некоторой её окрестности (интервале, содержащем точку x). Дадим аргументу x приращение Δx (положительное или отрицательное), такое, чтобы не выйти из указанной окрестности. Найдём соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то этот предел называется производной функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Таблица производных основных элементарных функций

$(c)' = 0 \ (c - \text{const})$; $\quad (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \ (\alpha - \text{const})$;

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;

$(\sin x)' = \cos x$; $\quad (\cos x)' = -\sin x$;

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $\quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

$(a^x)' = a^x \ln a$; $\quad (e^x)' = e^x$;

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$; $\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$;

$$^*(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad ^*(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$
$$^*(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};\quad ^*(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Основные правила дифференцирования

$$(c\cdot u)' = c\cdot u',\ c \text{ — const};\qquad (u\pm v)' = u'\pm v';$$
$$(uv)' = u'v + uv';\qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$
$$y = f\big(g(x)\big),\ y' = f'_u(u)\cdot g'_x(x),\ \text{где}\ u = g(x).$$

Отметим, что справедливо следующее свойство:

если функция $f(x)$ чётна (нечётна) и дифференцируема на всей области определения, то функция $f'(x)$ является нечётной (чётной).

Геометрический смысл производной

$f'(x_0)$ является угловым коэффициентом касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0. Напомним, что угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла, образованного этой прямой с положительным направлением оси Ox. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Механический смысл производной

Пусть $S = S(t)$ — уравнение зависимости пути от времени при движении какого-либо тела. Тогда $S'(t)$ — скорость движения этого тела в момент времени t. $S''(t)$ — ускорение движущегося тела в момент времени t.

Возрастание и убывание функции

Функция $y = f(x)$ *возрастает (убывает)* на множестве A, если для любых $x_1, x_2 \in A$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Замечание. Если функция возрастает (убывает) на двух промежутках, из этого ещё не следует, что она возрастает (убывает) на объединении этих промежутков. Например, функция $y = \dfrac{1}{x}$ убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, но она не является убывающей на области определения.

Если на каком-то промежутке функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) и дифференцируема на этом промежутке, то $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$, причём равенство нулю невозможно на промежутке ненулевой длины.

Верно и обратное утверждение, которое мы сформулируем в частном случае. Именно, если на каком-то промежутке $f'(x) \geqslant 0$ $\left(f'(x) \leqslant 0\right)$, причём равенство $f'(x) = 0$ достигается лишь в конечном числе точек этого промежутка, то функция $y = f(x)$ на этом промежутке возрастает (убывает). Отсюда следует, что если производная в точке x_0 меняет знак с «+» на «−» (с «−» на «+»), то функция $y = f(x)$ в этой точке меняет возрастание на убывание (убывание на возрастание). А это значит, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 максимум (минимум).

Предлагаем доказать самостоятельно, что для сложной функции $f\left(g(x)\right)$ двух непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ справедлива данная ниже табличка, в которой «+» означает возрастание функции, а «−» — убывание.

$f(x)$	+	+	−	−
$g(x)$	+	−	+	−
$f\left(g(x)\right)$	+	−	−	+

Наибольшее, наименьшее значения функции

Значение $f(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 называется *наибольшим (наименьшим)* значением этой функции, если для любого x из $D(f)$ выполняется неравенство

$$f(x_0) \geqslant f(x) \quad \left(f(x_0) \leqslant f(x)\right).$$

Справедлива следующая теорема.

Дифференцируемая на $(a; b)$ и непрерывная на $[a; b]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего (наименьшего) значения на границе отрезка $[a; b]$ или в одной из стационарных точек на интервале $(a; b)$.

В частности, если функция удовлетворяет условиям теоремы и имеет единственную критическую точку, которая является точкой максимума (минимума), то в ней достигается наибольшее (наименьшее) значение.

Применение свойств функций при решении уравнений

Рассмотрим уравнение $f(x) = g(x)$.

1. Пусть на ОДЗ уравнения функция $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает. Тогда уравнение не может иметь более одного корня.

2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и выполняются неравенства $f(a) > g(a)$, $f(b) < g(b)$. Тогда уравнение имеет по крайней мере один корень на интервале $(a; b)$.

3. Пусть число A является наибольшим значением функции $f(x)$ и наименьшим значением функции $g(x)$. Тогда исходное уравнение равносильно на ОДЗ системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

Первообразная

Пусть $f(x)$ — некоторая функция, заданная на некотором числовом промежутке A. Если функция $F(x)$ такова, что для любого x из промежутка A $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$ на промежутке A.

Отметим, что две первообразные для одной и той же функции отличаются на постоянную. И обратно, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то для любого c (c — const) функция $F(x) + c$ тоже первообразная для функции $f(x)$.

Приведём таблицу первообразных для основных элементарных функций. Буквой c везде обозначается произвольная постоянная.

$$F(x^\alpha) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\ (\alpha \neq -1). \qquad F\left(\frac{1}{x}\right) = \ln|x| + c.$$

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x + c,\ \ x > 0. \qquad F\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(-x) + c,\ \ x < 0.$$

$$F(\sin x) = -\cos x + c. \qquad F(\cos x) = \sin x + c.$$

$$F\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = \operatorname{tg} x + c. \qquad F\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\operatorname{ctg} x + c.$$

$$F(a^x) = \frac{a^x}{\ln a} + c. \qquad F(e^x) = e^x + c.$$

$$^*F\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \operatorname{arctg} x + c. \qquad ^*F\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin x + c.$$

Неопределённый интеграл

Неопределённым интегралом функции $f(x)$ называется множество всех её первообразных. Неопределённый интеграл функции $f(x)$ обозначается через $\int f(x)dx$ и вычисляется по формуле

$\int f(x)dx = F(x) + c$, где $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$.

Кроме того, при нахождении интегралов можно пользоваться формулами:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx;$$

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, где $k \in R$.

Определённый интеграл

Определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ можно найти по формуле $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, а $F(x)$ — первообразная для $f(x)$. Для приведённой формулы используется сокращённая запись:

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$.

Справедливы формулы: $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$, где $k \in R$;

$\int\limits_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$.

Площадь криволинейной трапеции (см. рис. 19) можно вычислить по формуле $S = \int\limits_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$.

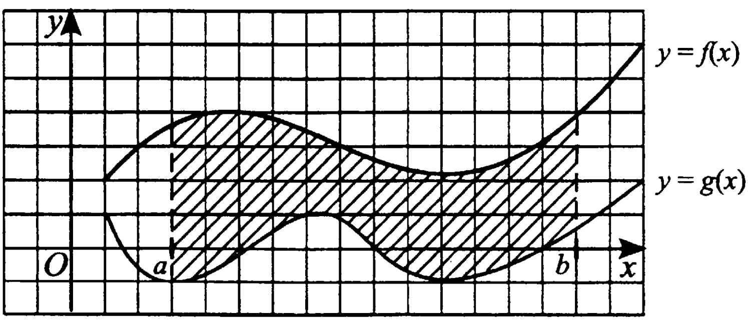


Рис. 19.

§ 12. Планиметрия

Параллельные прямые

Свойства и признаки параллельных прямых

1. **Аксиома параллельных.** Через данную точку можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

2. Если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой.

3. Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

4. Если две параллельные прямые пересечь третьей, то образованные при этом внутренние накрест лежащие углы равны; соответственные углы равны; внутренние односторонние углы в сумме составляют 180°.

5. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные внутренние накрест лежащие углы, то прямые параллельны.

6. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные соответственные углы, то прямые параллельны.

7. Если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Теорема Фалеса. Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла отложатся также равные отрезки.

Теорема о пропорциональных отрезках. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, высекают на них пропорциональные отрезки.

Треугольник

Признаки равенства треугольников

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.

2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то треугольники равны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то треугольники равны.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. По двум катетам.

2. По катету и гипотенузе.

3. По гипотенузе и острому углу.

4. По катету и острому углу.

Теорема о сумме углов треугольника и следствия из неё

1. Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.

2. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних не смежных с ним углов.

3. Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

4. Сумма внешних углов n-угольника равна 360°.

5. Углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые.

6. Угол между биссектрисами смежных углов равен 90°.

7. Биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны.

Основные свойства и признаки равнобедренного треугольника

1. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

2. Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.

3. В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведённые к основанию, совпадают.

4. Если в треугольнике совпадает любая пара отрезков из тройки: медиана, биссектриса, высота, — то он является равнобедренным.

Неравенство треугольника и следствия из него

1. Сумма двух сторон треугольника больше его третьей стороны.

2. Сумма звеньев ломаной больше отрезка, соединяющего начало первого звена с концом последнего.

3. Против большего угла треугольника лежит бóльшая сторона.

4. Против большей стороны треугольника лежит бóльший угол.

5. Гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета.

6. Если из одной точки проведены к прямой перпендикуляр и наклонные, то

1) перпендикуляр короче наклонных;

2) большей наклонной соответствует бóльшая проекция и наоборот.

Средняя линия треугольника. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется средней линией треугольника.

Теорема о средней линии треугольника. Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна её половине.

Теоремы о медианах треугольника

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

2. Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

3. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.

Теорема о высотах треугольника. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Теорема о биссектрисах треугольника. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

Свойство биссектрисы треугольника. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Признаки подобия треугольников

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.

2. Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого, то треугольники подобны.

Площади подобных треугольников

1. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

2. Если два треугольника имеют равные углы, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.

В прямоугольном треугольнике

1. Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего или на косинус прилежащего к этому катету острого угла.

2. Катет прямоугольного треугольника равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего или на котангенс прилежащего к этому катету острого угла.

3. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

4. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, противолежащий этому катету, равен 30°.

5. $R = \frac{c}{2}$; $r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$, где a, b — катеты, а c — гипотенуза прямоугольного треугольника; r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно.

Теорема Пифагора и теорема, обратная теореме Пифагора

1. Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

2. Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треугольник — прямоугольный.

Средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике

Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное проекций катетов на гипотенузу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

Метрические соотношения в треугольнике

1. **Теорема косинусов.** Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

2. **Следствие из теоремы косинусов.** Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

3. **Формула для медианы треугольника.** Если m — медиана треугольника, проведённая к стороне c, то $m = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, где a и b — остальные стороны треугольника.

4. **Теорема синусов.** Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

5. **Обобщённая теорема синусов.** Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около треугольника.

Формулы площади треугольника

1. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.

2. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

3. Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.

4. Площадь треугольника равна произведению трёх его сторон, делённому на учетверённый радиус описанной окружности.

5. Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр; a, b, c — стороны треугольника.

Элементы равностороннего треугольника

Пусть h, S, r, R — высота, площадь, радиусы вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника со стороной a. Тогда

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad R = 2r; \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Четырёхугольник

Параллелограмм. Параллелограммом называется четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Свойства и признаки параллелограмма

1. Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.

2. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.

3. Противоположные углы параллелограмма попарно равны.

4. Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

5. Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

6. Если две противоположные стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

7. Если диагонали четырёхугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Свойство середин сторон четырёхугольника. Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади четырёхугольника.

Прямоугольник. Прямоугольником называется параллелограмм с прямым углом.

Свойства и признаки прямоугольника

1. Диагонали прямоугольника равны.

2. Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Квадрат. Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны.

Ромб. Ромбом называется четырёхугольник, все стороны которого равны.

Свойства и признаки ромба

1. Диагонали ромба перпендикулярны.

2. Диагонали ромба делят его углы пополам.

3. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.

4. Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то этот параллелограмм — ромб.

Трапеция. Трапецией называется четырёхугольник, у которого только две противоположные стороны (основания) параллельны. Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины непараллельных сторон (боковых сторон).

1. **Теорема о средней линии трапеции.** Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

2. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

Замечательное свойство трапеции. Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Равнобедренная трапеция. Трапеция называется равнобедренной, если её боковые стороны равны.

Свойства и признаки равнобедренной трапеции

1. Углы при основании равнобедренной трапеции равны.

2. Диагонали равнобедренной трапеции равны.

3. Если углы при основании трапеции равны, то она равнобедренная.

4. Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.

5. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.

Формулы площади четырёхугольника

1. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту.

2. Площадь параллелограмма равна произведению его соседних сторон на синус угла между ними.

3. Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.

4. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

5. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

6. Площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

7. Формула Герона для четырёхугольника, около которого можно описать окружность: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где a, b, c, d — стороны этого четырёхугольника, p — полупериметр, а S — площадь.

Подобные фигуры

1. Отношение соответствующих линейных элементов подобных фигур равно коэффициенту подобия.

2. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

Правильный многоугольник

Пусть a_n — сторона правильного n-угольника, а r_n и R_n — радиусы вписанной и описанной окружностей. Тогда

$$a_n = 2R_n \cdot \sin\frac{180^\circ}{n};\ \ a_n = 2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}\cdot r_n;\ \ r_n = R_n \cdot \cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной точки, называемой центром окружности.

Основные свойства окружности

1. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит хорду и стягиваемые ею дуги пополам.

2. Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.

3. Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.

4. Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.

5. Хорды окружности, удалённые от центра на равные расстояния, равны.

6. Окружность симметрична относительно любого своего диаметра.

7. Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.

8. Из двух хорд больше та, которая менее удалена от центра.

9. Диаметр есть наибольшая хорда окружности.

Замечательные свойства окружности

1. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMB = 90°$), есть окружность с диаметром AB без точек A и B.

2. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под острым углом ($\angle AMB < 90°$), есть внешность круга с диаметром AB без точек прямой AB.

3. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под тупым углом ($\angle AMB > 90°$), есть внутренность круга с диаметром AB без точек отрезка AB.

4. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей (без концов этих дуг).

Касательная к окружности

Прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку, называется касательной к окружности.

1. Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

2. Если прямая a, проходящая через точку на окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то прямая a — касательная к окружности.

3. Если прямые, проходящие через точку M, касаются окружности в точках A и B, то $MA = MB$ и $\angle AMO = \angle BMO$, где точка O — центр окружности.

4. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

Касающиеся окружности

Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точку касания).

1. Точка касания двух окружностей лежит на линии центров этих окружностей.

2. Окружности радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $R + r = O_1O_2$.

3. Окружности радиусов r и R $(r < R)$ с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда $R - r = O_1O_2$.

4. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной, проходящей через точку K, в точке C. Тогда $\angle AKB = 90°$ и $\angle O_1CO_2 = 90°$.

5. Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен отрезку общей внутренней касательной, заключённому между общими внешними касательными. Оба эти отрезка равны $2\sqrt{Rr}$.

Углы, связанные с окружностью

1. Величина дуги окружности равна величине центрального угла, на неё опирающегося.

2. Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

3. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

4. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.

5. Угол между двумя секущими, пересекающимися вне круга, равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.

6. Угол между касательной и хордой, проведённой из точки касания, равен половине угловой величины дуги, высекаемой на окружности этой хордой.

Свойства хорд окружности

1. Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде.

2. Произведения длин отрезков хорд AB и CD окружности, пересекающихся в точке E, равны, то есть $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

Вписанные и описанные окружности

1. Центры вписанной и описанной окружностей правильного треугольника совпадают.

2. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы.

3. Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

4. Если четырёхугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна $180°$.

5. Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна $180°$, то около него можно описать окружность.

6. Если в трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.

7. Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

8. Если в многоугольник можно вписать окружность, то его площадь равна произведению полупериметра многоугольника на радиус этой окружности.

Теорема о касательной и секущей и следствие из неё

1. Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.

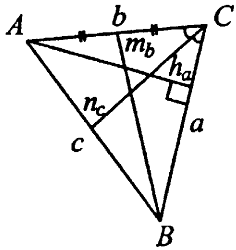
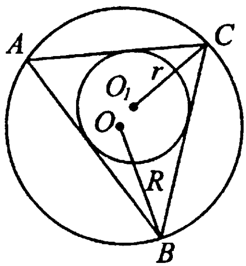
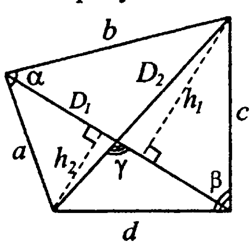
2. Произведение всей секущей на её внешнюю часть для данной точки и данной окружности постоянно.

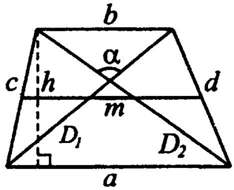
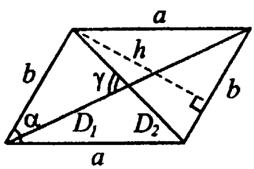
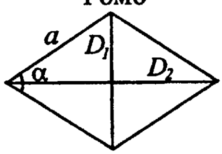
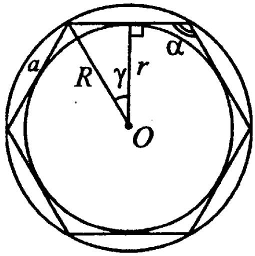
Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

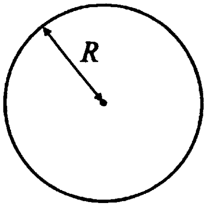
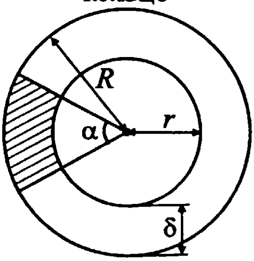
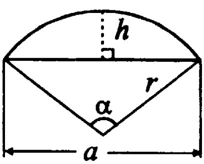
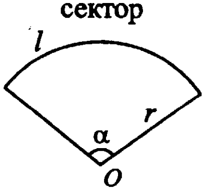
Площадь круга радиуса R равна πR^2.

Основные формулы

Далее S — площадь фигуры, P — периметр, p — полупериметр.

Чертежи	Обозначения	Формулы
Треугольник  	a, b, c — стороны; A, B, C — противолежащие им углы; h_a, h_b, h_c — высоты, проведённые к соответствующим сторонам; n_a, n_b, n_c — биссектрисы, проведённые к соответствующим сторонам; b_a и b_c — отрезки, на которые делится биссектрисой сторона b; m_a, m_b, m_c — медианы, проведённые к соответствующим сторонам; $\mu = \dfrac{(m_a+m_b+m_c)}{2}$ — полусумма медиан; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности.	$h_b = \dfrac{2S}{b}$ $m_b = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$ $n_b = \dfrac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$ $n_b = \sqrt{ac - b_a b_c}$ $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ $S = \dfrac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A}$ $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ $S = r^2 \operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$ $S = pr = \dfrac{abc}{4R}$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $S = \dfrac{4}{3}\sqrt{\mu}\times$ $\times\sqrt{(\mu-m_a)(\mu-m_b)(\mu-m_c)}$
Четырёхугольник 	a, b, c, d — стороны; D_1, D_2 — диагонали; γ — угол между диагоналями; h_1, h_2 — длины перпендикуляров, опущенных на диагональ D_1; α, β — два противолежащих угла четырёхугольника.	$S = \dfrac{h_1+h_2}{2}D_1$ $S = \dfrac{1}{2}D_1 D_2 \sin\gamma$ $S = \dfrac{1}{2}(ab\sin\alpha + cd\sin\beta)$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Трапеция 	a, b — основания; c, d — боковые стороны; D_1, D_2 — диагонали; α — угол между диагоналями; m — средняя линия; h — высота.	$m = \frac{1}{2}(a+b)$ $P = 2m + c + d$ $S = \frac{1}{2}(a+b)h = mh$ $S = \frac{1}{2}D_1D_2\sin\alpha$
Параллелограмм 	a, b — стороны; h — расстояние между сторонами b; α — угол параллелограмма; D_1, D_2 — диагонали; γ — угол между диагоналями.	$S = bh$ $S = ab\sin\alpha$ $S = \frac{1}{2}D_1D_2\sin\gamma$
Ромб 	a — сторона; α — угол ромба; D_1, D_2 — диагонали.	$S = a^2\sin\alpha$ $S = \frac{1}{2}D_1D_2$
Правильный многоугольник 	n — число сторон; a — сторона; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; $\alpha = 180° - 2\gamma$ — угол многоугольника $\left(\gamma = \frac{180°}{n}\right)$.	$a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ $P = na$ $P = 2nR\sin\gamma = 2nr\,\mathrm{tg}\,\gamma$ $S = \frac{1}{4}na^2\,\mathrm{ctg}\,\gamma$ $S = nr^2\,\mathrm{tg}\,\gamma$ $S = \frac{1}{2}nR^2\sin 2\gamma$ $S = \frac{1}{2}nar$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Круг 	R — радиус; l — длина окружности.	$S = \pi R^2$ $l = 2\pi R$
Круговое кольцо 	r — внутренний радиус; R — наружный радиус; d — внутренний диаметр; D — наружный диаметр; $\varrho = \dfrac{r+R}{2}$ — средний радиус; $\delta = R - r$ — ширина кольца; α — центральный угол части кольца (в градусах).	$S = \pi(R^2 - r^2)$ $S = \dfrac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ $S = 2\pi\rho\delta$ Площадь части кольца: $S = \dfrac{\pi\alpha}{360}(R^2 - r^2)$ $S = \dfrac{\pi\alpha}{90}(D^2 - d^2)$ $S = \dfrac{\pi\alpha}{180}\rho\delta$
Круговой сегмент 	r — радиус; α — центральный угол (в градусах); $l = \dfrac{\pi\alpha}{180}r$ — длина дуги; a — длина хорды; h — высота.	$P = l + a$ $S = \dfrac{1}{2}r^2\left(\dfrac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right)$ $S = \dfrac{r(l-a) + ah}{2}$
Круговой сектор 	r — радиус; α — центральный угол (в градусах); $l = \dfrac{\pi\alpha}{180}r$ — длина дуги.	$P = l + 2r$ $S = \dfrac{lr}{2}$ $S = \dfrac{\pi r^2\alpha}{360}$

§ 13. Стереометрия

Аксиомы стереометрии

Основные аксиомы

1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Факты, непосредственно связанные с аксиомами

1. Через прямую и точку, не лежащую на этой прямой, проходит единственная плоскость.

2. Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.

3. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной.

Параллельность в пространстве

1. **Признак параллельности прямой и плоскости.** Если прямая a параллельна некоторой прямой плоскости α, то прямая a параллельна плоскости α.

2. Если через прямую a, параллельную плоскости α, провести плоскость, пересекающую плоскость α по прямой b, то прямые a и b параллельны.

3. Если прямые a и b параллельны, а плоскость, проходящая через прямую a, пересекается с плоскостью, проходящей через прямую b, то прямая пересечения плоскостей параллельна прямым a и b.

4. **Транзитивность параллельности прямых в пространстве.** Если прямая a параллельна прямой b, а прямая b параллельна прямой c, то прямая a параллельна прямой c.

5. **Признак параллельности плоскостей.** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.

6. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то прямые пересечения параллельны.

7. **Транзитивность параллельности плоскостей.** Если плоскость α параллельна плоскости β, а плоскость β параллельна плоскости γ, то плоскость α параллельна плоскости γ.

8. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

9. Через точку, не лежащую в плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной.

Скрещивающиеся прямые

1. **Признак скрещивающихся прямых.** Если прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на прямой a, то a и b — скрещивающиеся прямые.

2. Через две скрещивающиеся прямые проходит единственная пара параллельных плоскостей.

3. Геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых есть плоскость, параллельная этим прямым и проходящая через середину одного из таких отрезков.

4. Угол между скрещивающимися прямыми (угол между пересекающимися в произвольной точке M прямыми, соответственно параллельными данным) не зависит от выбора точки M.

5. Для любых двух скрещивающихся прямых существует единственный общий перпендикуляр (отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный обеим прямым).

Параллельное проектирование

1. Прямая, не параллельная проектирующей, переходит в прямую.

2. Пара параллельных прямых, не параллельных проектирующей, переходит в пару параллельных прямых или в одну прямую.

3. При проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.

4. Наклонная пересекает плоскость в точке, лежащей на любой её параллельной проекции на эту плоскость.

5. Площадь ортогональной проекции плоского многоугольника на плоскость равна произведению площади проектируемого многоугольника на косинус угла между плоскостью этого многоугольника и плоскостью проекций.

Координаты и векторы в пространстве

1. Координаты вектора равны разностям соответствующих координат конца и начала данного вектора.

2. Для того чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, где k — некоторое число.

3. Для того чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить в виде линейной комбинации двух других ($\vec{a} = x \cdot \vec{b} + y \cdot \vec{c}$, где x, y — некоторые числа).

4. Любой вектор можно единственным образом разложить по трём некомпланарным векторам.

5. Если M — середина AB, то $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

6. Если M — середина AB, а N — середина CD, то $\overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}}{2}$.

7. Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$.

8. Если M — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, то $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}$.

9. Координаты середины отрезка равны средним арифметическим координат его концов.

10. **Свойства скалярного произведения векторов:**

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

б) $\alpha\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

в) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

г) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}$;

д) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + 2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{b}^{\,2}$;

е) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leqslant \vec{a}^{\,2} \cdot \vec{b}^{\,2}$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны;

ж) ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

11. **Расстояние между точками** $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ равно

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

12. **Угол между ненулевыми векторами.** Если φ — угол между ненулевыми векторами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

13. **Уравнение плоскости, проходящей через точку** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n}(a; b; c)$ (вектор нормали), имеет

вид

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

14. **Параметрические уравнения прямой,** проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно ненулевому вектору $\vec{m}(a; b; c)$ (направляющий вектор), имеют вид

$$\begin{cases} x-x_0=at, \\ y-y_0=bt, \\ z-z_0=ct. \end{cases}$$

15. **Уравнения прямой, проходящей через две точки** $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

16. **Прямая как пересечение двух плоскостей** задаётся системой

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

где $A_1^2+B_1^2+C_1^2\neq 0$ и $A_2^2+B_2^2+C_2^2\neq 0$, а коэффициенты при соответствующих неизвестных непропорциональны.

17. **Угол между плоскостями.** Если φ — угол между плоскостями, заданными уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, то

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

18. **Уравнение плоскости «в отрезках».** Если плоскость пересекает оси координат в точках $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ и $C(0; 0; c)$ $(a, b, c\neq 0)$, то её уравнение можно представить в виде

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

19. **Расстояние от точки до плоскости.** Если ρ — расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, то

$$\rho=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Перпендикулярность прямой и плоскости

1. **Признак перпендикулярности прямой и плоскости.** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

2. Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны.

3. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то вторая прямая также перпендикулярна этой плоскости.

4. Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

5. Если прямая и плоскость перпендикулярны одной прямой, то они параллельны.

6. Через данную точку проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.

7. Через данную точку проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

8. **Теорема о трёх перпендикулярах.** Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на эту плоскость.

9. Если из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонные, то

а) перпендикуляр короче наклонных;

б) равные наклонные имеют равные ортогональные проекции;

в) большей наклонной соответствует бóльшая ортогональная проекция;

г) из двух наклонных больше та, ортогональная проекция которой больше.

10. **Теорема об угле прямой с плоскостью.** Угол между наклонной и её ортогональной проекцией на плоскость меньше угла между этой наклонной и любой другой прямой плоскости.

11. Геометрическое место точек, равноудалённых от концов отрезка, есть плоскость, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

12. Геометрическое место точек, удалённых на данное расстояние от данной плоскости, есть две параллельные плоскости.

13. Геометрическое место точек, равноудалённых от вершин треугольника, есть прямая, проходящая через центр описанной окружности треугольника перпендикулярно его плоскости.

Двугранный угол

1. Линейный угол двугранного угла (сечение двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру) не зависит от выбора точки на ребре двугранного угла.

2. Геометрическое место внутренних точек двугранного угла, равноудалённых от его граней, есть биссекторная плоскость двугранного угла.

3. **Необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей.** Две плоскости перпендикулярны (образуют прямой двугранный угол) тогда и только тогда, когда одна из них проходит через перпендикуляр к другой.

4. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то они пересекаются по прямой, также перпендикулярной этой плоскости.

Многогранные углы

1. Плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

2. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Сфера. Касательная плоскость. Касающиеся сферы

1. Сечение сферы плоскостью, удалённой от центра сферы на расстояние, меньшее радиуса, есть окружность. Основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость, есть центр этой окружности.

2. Касательная плоскость к сфере (плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведённому в точку касания.

3. Касательная прямая к сфере (прямая, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведённому в точку касания.

4. Центр сферы, вписанной в двугранный угол, лежит в биссекторной плоскости этого угла.

5. Отрезки касательных прямых, проведённых к сфере из одной точки, равны между собой.

6. Линия центров касающихся сфер (имеющих единственную общую точку) проходит через их точку касания.

7. Если две различные сферы имеют более одной общей точки, то они пересекаются по окружности. Плоскость этой окружности перпендикулярна линии центров данных сфер.

Пирамида

Правильная пирамида

1. Если $ABCD$ — правильная треугольная пирамида с вершиной D, высотой DM и стороной основания a, а A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно, то

а) $\angle DAM = \angle DBM = \angle DCM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) $\angle DA_1M = \angle DB_1M = \angle DC_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) $\angle AFB$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A основания на боковое ребро DC) — линейный угол между боковыми гранями пирамиды;

г) $AA_1 = BB_1 = CC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ — высота треугольника основания;

д) $AM = BM = CM = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = \frac{AA_1}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ — ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;

ж) C_1F — общий перпендикуляр противоположных рёбер AB и CD.

2. Противоположные рёбра правильной треугольной пирамиды попарно перпендикулярны.

3. Высота правильного тетраэдра с ребром a равна $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. Если $PABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с вершиной P, высотой PM и стороной основания a, а A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно, то

а) $\angle PAM = \angle PBM = \angle PCM = \angle PDM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) $\angle PA_1M = \angle PB_1M = \angle PC_1M = \angle PD_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) $\angle BFD$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B основания на боковое ребро AP) — линейный угол между соседними боковыми гранями пирамиды;

г) $\angle A_1PC_1 = \angle B_1PD_1$ — линейный угол двугранного угла между противоположными боковыми гранями;

д) $AM = BM = CM = DM = \frac{DB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = D_1M = \frac{a}{2}$ — ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;

ж) FM — общий перпендикуляр диагонали BD основания и скрещивающегося с ней бокового ребра AP.

5. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ним диагонали основания.

Правильный тетраэдр. Пусть a — ребро правильного тетраэдра, а R и r — радиусы описанной и вписанной сфер, V — объём тетраэдра. Тогда

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}; \quad r = \frac{a\sqrt{6}}{12}; \quad R = 3r; \quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Пирамида

1. Если боковые грани треугольной пирамиды образуют равные двугранные углы с плоскостью основания, то высота пирамиды проходит либо через центр вписанной окружности, либо через центр одной из вневписанных окружностей основания.

2. Если все боковые рёбра пирамиды образуют с основанием равные углы или если все боковые рёбра равны, то высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания.

3. **Теорема о медианах тетраэдра.** Медианы тетраэдра (отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противолежащих граней) пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3 : 1, считая от вершины.

4. Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной основанию, то в сечении образуется многоугольник, подобный основанию.

5. В пирамиде и в конусе площади сечений, параллельных основанию, относятся как квадраты их расстояний до вершины.

Параллелепипед

1. Параллелепипед называется прямым, если его боковые рёбра перпендикулярны основанию.

2. Прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник, называется прямоугольным.

3. **Свойства диагоналей прямоугольного параллелепипеда**

а) диагонали прямоугольного параллелепипеда равны;

б) квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений (длин трёх рёбер с общей вершиной).

4. **Свойства граней и диагоналей параллелепипеда.** Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны. Диагонали параллелепипеда пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

5. Диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через точку пересечения медиан треугольника A_1BD и делится ею в отношении $1:2$, считая от точки A.

Площади поверхности многогранников

1. Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призмы на боковое ребро.

2. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна площади её основания, делённой на косинус угла боковой грани с плоскостью основания.

Объёмы многогранников

1. Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.

2. Объём наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.

3. Объём призмы равен произведению площади основания на высоту.

4. Объём треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние между этой гранью и противолежащим ей боковым ребром.

5. Объём пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту.

6. Пирамиды с равными высотами и равновеликими основаниями равновелики.

7. Плоскость, проходящая через вершину пирамиды и прямую, лежащую в основании, делит объём пирамиды в том же отношении, в котором прямая делит площадь основания.

8. Если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на боковых рёбрах DA, DB и DC соответственно треугольной пирамиды $ABCD$ или на их продолжениях, то объём пирамиды $A_1B_1C_1D_1$ относится к объёму пирамиды $ABCD$ как произведение отношений $\frac{DA_1}{DA} \cdot \frac{DB_1}{DB} \cdot \frac{DC_1}{DC}$.

9. Отношение объёмов подобных многогранников равно кубу коэффициента подобия.

10. Объём V тетраэдра равен шестой части произведения длин двух противоположных рёбер a и b на расстояние c между ними и на синус угла φ между ними, то есть $V = \frac{1}{6}abc\sin\varphi$.

11. Объём V тетраэдра равен двум третям произведения площадей двух граней P и Q на синус угла φ между ними, делённому на их общее ребро a, то есть $V = \frac{2}{3}\frac{PQ\sin\varphi}{a}$.

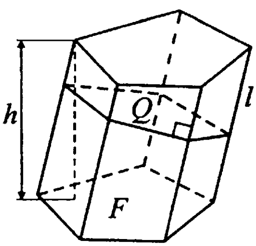
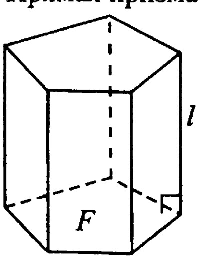
12. А. Объём тетраэдра равен трети произведения его полной поверхности на радиус вписанной сферы.

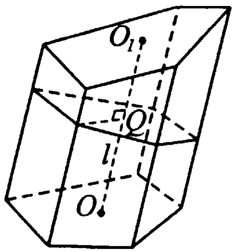
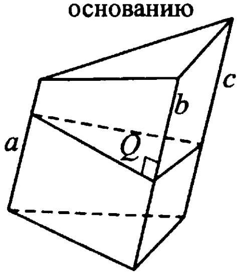
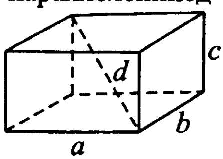
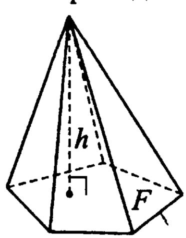
Б. Объём многогранника, в который можно вписать сферу, равен трети произведения полной поверхности многогранника на радиус вписанной сферы.

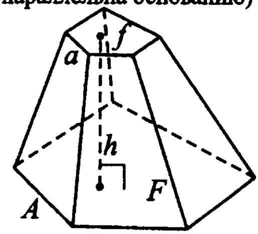
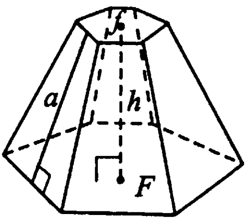
Основные формулы

Далее V — объём тела, $S_б$ и S — его боковая и полная поверхности.

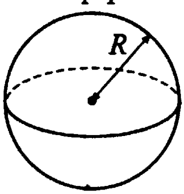
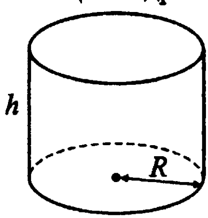
Многогранники

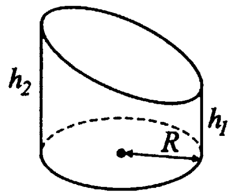
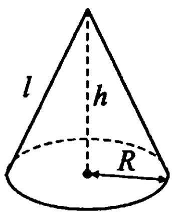
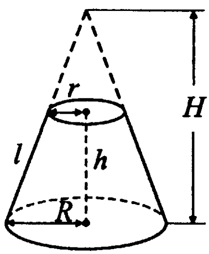
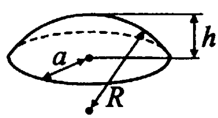
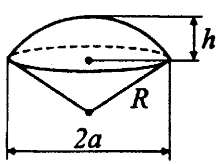
Чертежи	**Обозначения**	**Формулы**
Призма 	F — площадь основания; h — высота; l — боковое ребро; Q и P — площадь и периметр сечения, перпендикулярного боковому ребру.	$V = Fh = Ql$ $S_б = Pl$ $S = Pl + 2F$
Прямая призма 	F и P — площадь и периметр основания; l — боковое ребро.	$V = Fl$ $S_б = Pl$ $S = Pl + 2F$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Призма, усечённая непараллельно основанию 	l — длина отрезка OO_1, соединяющего центры тяжести оснований; Q — площадь сечения, перпендикулярного к отрезку OO_1.	$V = Ql$
Треугольная призма, усечённая непараллельно основанию 	a, b и c — параллельные рёбра; Q — площадь сечения, перпендикулярного к рёбрам.	$V = \frac{1}{3}(a+b+c)Q$
Прямоугольный параллелепипед 	a, b и c — рёбра; d — диагональ: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.	$V = abc$ $S = 2(ab+bc+ac)$
Пирамида 	F — площадь основания; h — высота; P — периметр основания; a — апофема (высота боковой грани правильной пирамиды).	$V = \frac{1}{3}Fh$ Правильная пирамида: $S_б = \frac{1}{2}Pa$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Усечённая пирамида (плоскость сечения параллельна основанию) 	F, f — площади оснований; h — высота (расстояние между основаниями); A, a — две соответственные стороны оснований.	$V = \frac{1}{3}h(F + f + \sqrt{Ff})$ $V = \frac{1}{3}hF\left(1 + \frac{a}{A} + \left(\frac{a}{A}\right)^2\right)$
Правильная усечённая пирамида 	F, f — площади оснований; P, p — периметры оснований; h — высота; a — апофема (высота боковой грани).	$V = \frac{1}{3}h(F + f + \sqrt{Ff})$ $S_б = \frac{P+p}{2} \cdot a$

Тела вращения

Чертежи	Обозначения	Формулы
Сфера 	R — радиус.	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ $S = 4\pi R^2$
Цилиндр 	R — радиус основания; h — высота.	$V = \pi R^2 h$ $S_б = 2\pi Rh$ $S = 2\pi R(h + R)$

Цилиндр, **усечённый непараллельно основанию** 	R — радиус основания; h_1 и h_2 — наименьшая и наибольшая образующие.	$V = \frac{1}{2}\pi R^2(h_1 + h_2)$ $S_б = \pi R(h_1 + h_2)$ $S = \pi R\left(h_1 + h_2 + R + \sqrt{R^2 + \left(\frac{h_2 - h_1}{2}\right)^2}\right)$
Конус 	R — радиус основания; h — высота; $l = \sqrt{R^2 + h^2}$ — образующая.	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ $S_б = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$ $S_б = \pi Rl$ $S = \pi R(R + l)$
Усечённый конус 	R и r — радиусы оснований; h — высота; $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$ — образующая; H — высота неусечённого конуса: $H = h + \frac{hr}{R - r}$.	$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$ $S_б = \pi l(R + r)$ $S = \pi\left(R^2 + r^2 + l(R + r)\right)$
Шаровой сегмент 	h — высота сегмента; R — радиус шара; $a = \sqrt{h(2R - h)}$ — радиус основания сегмента.	$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$ $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$ $S_б = 2\pi Rh$ $S_б = \pi(a^2 + h^2)$ $S = \pi(2a^2 + h^2)$ $S = \pi(a^2 + 2Rh)$
Шаровой сектор 	h — высота сегмента; R — радиус шара; a — радиус основания сегмента.	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$ $S = \pi R(a + 2h)$

6. Зак. № 6

Глава I. Учебно-тренировочные тесты

Инструкция по выполнению работы

На выполнение заданий экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания B1—B10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания B11—B15 и C1—C6) базового, повышенного и высокого уровней сложности по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий B1—B15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий C1—C6 требуется записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, как они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Вариант № 1

Часть 1

Ответом на задания B1–B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. Экскурсия по городу была организована для 127 школьников. Найдите, какое количество автобусов вместимостью 33 человека необходимо заказать для проведения этой экскурсии.

B2. Одна поездка в маршрутном такси стоит 20 рублей. Какое наибольшее число поездок можно будет совершить на 1500 рублей после повышения цены проезда на 20%?

B3. На рисунке 20 жирными точками показана динамика изменения курса доллара США по отношению к рублю во все рабочие дни с 08.01.12 по 05.02.12. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — курс доллара по отношению к рублю. Для наглядности жирные точки соединены линиями. Определите по рисунку курс доллара 15.01.12 (в рублях).

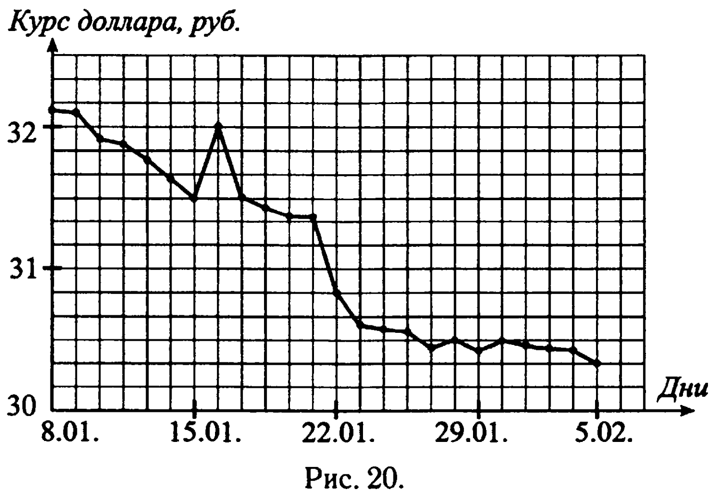


Рис. 20.

B4. От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в минутах.

	1	2	3
Автобусом	От дома до автобусной остановки — 10 мин	Автобус в пути — 3 часа 15 минут	От автобусной остановки до дачи пешком — 25 мин
Электричкой	От дома до станции железной дороги — 35 мин	Электричка в пути — 2 часа 10 мин	От станции до дачи пешком — 30 мин
Маршрутным такси	От дома до остановки маршрутного такси — 1 час 5 мин	Маршрутное такси в пути — 1 час 50 мин	От остановки маршрутного такси до дачи пешком — 25 мин

B5. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 21). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

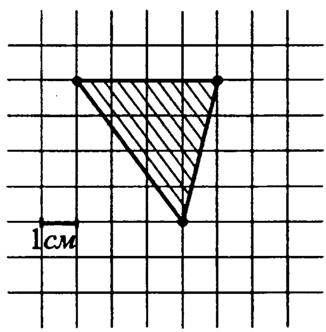


Рис. 21.

B6. В сборнике билетов по физике всего 30 билетов, в 6 из них встречается вопрос по механике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по механике.

B7. Найдите корень уравнения $x^2 - 5x - 14 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите меньший.

B8. Найдите диаметр окружности, описанной около квадрата, изображённого на рисунке 22.

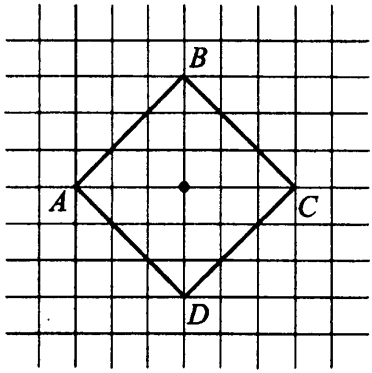


Рис. 22.

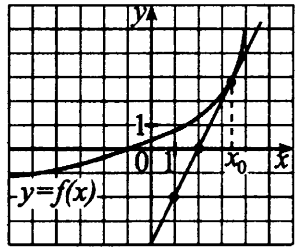


Рис. 23.

B9. На рисунке 23 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

B10. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 24 (все двугранные углы прямые).

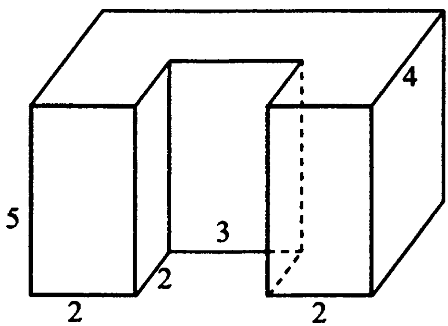


Рис. 24.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $(5x - 7)(5x + 9) - 25x^2 - 9x + 49$ при $x = 5$.

B12. Независимое агентство намерено ввести рейтинг R новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый показатель оценивается целыми числами от -4 до 4.

Аналитик, составляющий формулу, считает, что информативность публикаций ценится втрое, а объективность — вдвое дороже, чем оперативность. В результате формула примет вид

$$R = \frac{3In + Op + 2Tr}{A}.$$

Каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели наибольшие, получило рейтинг 40?

B13. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором диагональ $A_1C = 13$. Найдите длину ребра BC, если $A_1B_1 = 3$ и $DD_1 = 12$.

B14. Первые четыре часа автомобиль ехал со скоростью 65 км/ч, следующие два часа — со скоростью 90 км/ч, а затем два часа — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

B15. Найдите наибольшее значение функции $y = x + \frac{4}{x}$ на $[-8; -1]$.

При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sqrt{3}\sin 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$.

C2. В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC, ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 6, а ребро MA равно 10. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $CD = BE = ML = 2$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

C3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 36^{x-\frac{1}{2}} - 37 \cdot 6^{x-1} + 6 \geqslant 0, \\ x \cdot \log_5(11 - 3x - x^2) \geqslant 0. \end{cases}$

C4. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH. Из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC.

б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH = 10$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 12.

C5. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(|x+3|+|x-a|\right)^2 - 6\left(|x+3|+|x-a|\right) + 8a(6-8a) = 0$$

имеет ровно два решения.

C6. На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста — доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 7,2, 9,5 и 11,8 округляются до 7, 10 и 12 соответственно.

а) Всего проголосовало 17 посетителей сайта. Мог ли рейтинг некоторого футболиста быть равным 27?

б) Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трёх футболистов. Могла ли сумма рейтингов быть больше 100?

в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 8. Это число не изменилось и после того, как Петя отдал свой голос за этого футболиста. При каком наименьшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Петин голос, такое возможно?

Вариант № 2

Часть 1

Ответом на задания B1–B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. Учащиеся в количестве 46 человек и два учителя отправляются на экскурсию. Какое наименьшее количество автобусов надо заказать, если число посадочных мест в автобусе 25?

B2. 6 выпускников школы собираются продолжить обучение в вузах других городов. Они составляют 5% от числа выпускников. Сколько в школе выпускников?

B3. На рисунке 25 показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 15 мая. Ответ дайте в градусах Цельсия.

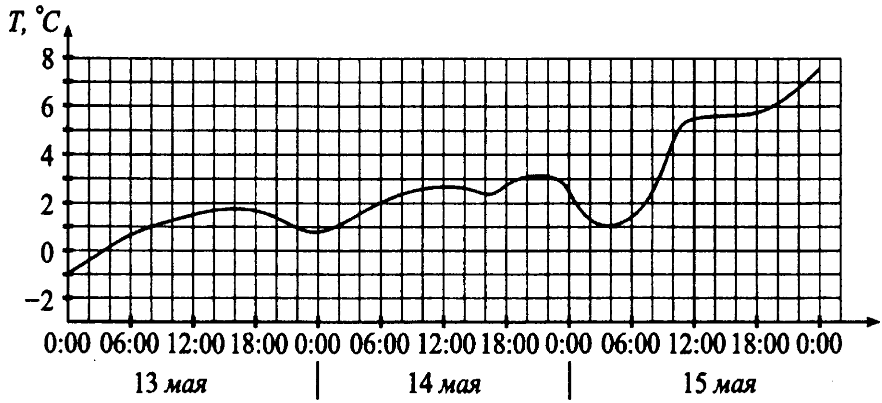


Рис. 25.

B4. В магазине «Лазурь» объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 8000 рублей, он получает сертификат на 900 рублей, который можно обменять в том же магазине на любой товар ценой не выше 900 рублей. Если покупатель участвует в акции, то теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Онегин хочет приобрести часы стоимостью 9300 рублей, браслет ценой 780 рублей и детскую игрушку ценой 630 рублей. В каком случае Онегин заплатит меньше всего?

1) Онегин купит все три товара сразу.

2) Онегин купит сначала часы и браслет, детскую игрушку получит за сертификат.

3) Онегин купит сначала часы и детскую игрушку, браслет получит за сертификат.

В ответе запишите, сколько рублей заплатит Онегин за покупку в выбранном случае.

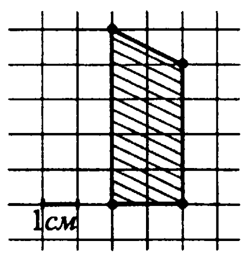


Рис. 26.

B5. Найдите площадь трапеции (в см^2), изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 26).

B6. В сборнике билетов по истории всего 20 билетов, в 7 из них встречается вопрос по XVII веку. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопрос по XVII веку.

B7. Найдите корень уравнения $x^2 - 13x + 42 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

B8. В треугольнике ABC угол A равен 24°, $AC = CB$ (см. рис. 27). Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

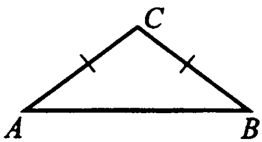


Рис. 27.

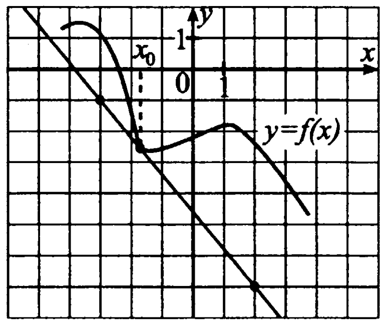


Рис. 28.

B9. На рисунке 28 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

B10. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 29 (все двугранные углы прямые).

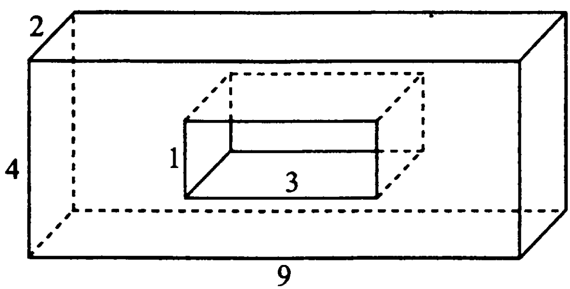


Рис. 29.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $(326^2 - 27^2) : 353$.

B12. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In, оперативности Op, объективности публикаций Tr, а также качества сайта Q. Каждый отдельный показатель оценивается читателями по 5-балльной шкале целыми числами от -2 до 2.

Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится вдвое, а информативность публикаций — втрое дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{3In + Op + 2Tr + Q}{A}.$$

Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A, при котором это условие будет выполняться.

B13. Найдите квадрат расстояния между вершинами C и A_2 многогранника, изображённого на рисунке 30. Все двугранные углы многогранника прямые.

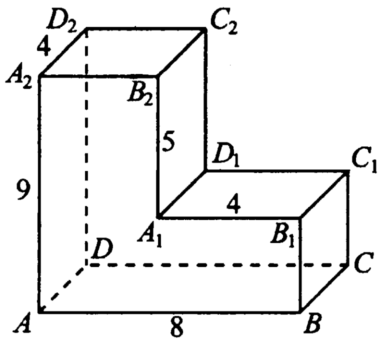


Рис. 30.

B14. В ёмкость, содержащую 12 кг 8%-ного раствора вещества, добавили 4 кг воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

B15. Найдите точку минимума функции $y = -\frac{1}{x} - x$.

При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $6\sin^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - 3\sqrt{2}\cos x = 0$.

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

С2. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро AS перпендикулярно основанию ABC, треугольник ABC равносторонний, ребро $SB = 6$, $AB = 4$. На рёбрах AC, BC и SC взяты соответственно точки P, T и M так, что $PC = TC = 3$, $SM = 4$. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки P, T и M.

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3^x + 8 \cdot 3^{-x} \geqslant 9, \\ 4\log_{(x^2-6x+10)^4}(5x^2+7) \leqslant \log_{(x^2-6x+10)}(4x^2+11x+7). \end{cases}$$

С4. Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, вторая окружность касается продолжения оснований и большей боковой стороны трапеции.

а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.

б) Найдите расстояние от вершины прямого угла трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности и большей боковой стороны делит её на отрезки 28 и 7.

С5. Найдите все значения параметра a, при котором уравнение
$a^2 + 84a + 20|x - 5a| + 5\log_2(6x^2 - 60xa + 150a^2 + 32) = 10x + 8|x - 2a|$
имеет хотя бы одно решение.

С6. Из набора цифр 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9 составляют пару чисел, используя каждую цифру ровно один раз. Одно из этих чисел двузначное и кратно 28, другое — пятизначное и кратно 4.

а) Приведите пример такой пары.

б) Сколько существует различных пар таких чисел?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел в такой паре?

Вариант № 3

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

В1. Теплоход рассчитан на 720 пассажиров и 25 членов экипажа. Каждая спасательная лодка может вместить 50 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

В2. В школьный хор мальчиков изъявили желание записаться 56 человек. Прослушивание прошли 75% потенциальных участников. Найдите, сколько мальчиков прошли прослушивание.

В3. На диаграмме (см. рис. 31) показано изменение уровня атмосферных осадков h (в мм) в некотором городе в течение года. По горизонтали отмечается время — месяцы года, по вертикали — уровень осадков (в мм), выпавших в соответствующем месяце. Найдите по диаграмме номер месяца, в котором уровень осадков был 25 мм.

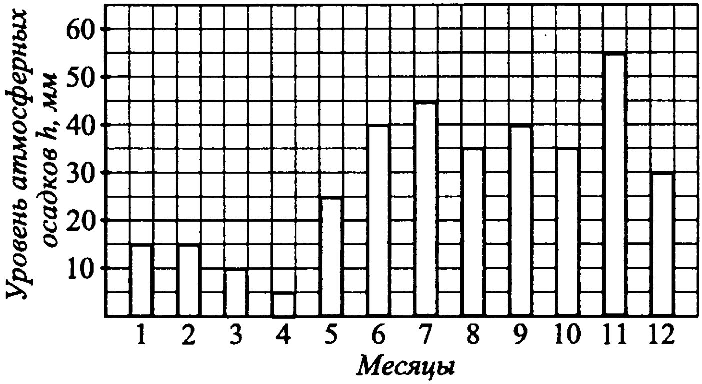


Рис. 31.

В4. Рейтинговое агентство определяет рейтинг мультиварок по соотношению «цена – качество». Рейтинг вычисляется на основе средней цены P, а также оценок функциональности (объём чаши, мощность) F, качества Q (экономичность и удобство управления) и дизайна D, которые эксперты оценивают целыми числами от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 7(F + Q) + 3D - 0{,}001P.$$

В таблице даны оценки каждого показателя для нескольких моделей печей. Определите, какая модель имеет наивысший рейтинг. В ответе запишите значение этого рейтинга.

Модель печи	**Средняя цена**	**Объём**	**Удобство управления**	**Дизайн**
А	4200	2	2	1
Б	5400	3	2	2
В	9700	3	4	3
Г	12000	4	3	4

B5. Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 32). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

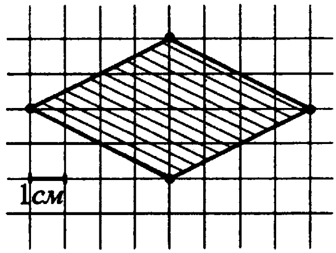


Рис. 32.

B6. На панели лифта в подъезде 10-этажного дома 10 кнопок, каждая из которых занумерована одной из цифр от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет нечётной?

B7. Найдите корень уравнения $\frac{1}{2}x^2 = 40\frac{1}{2}$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

B8. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 29° и 43°. Найдите больший из оставшихся углов (см. рис. 33). Ответ запишите в градусах.

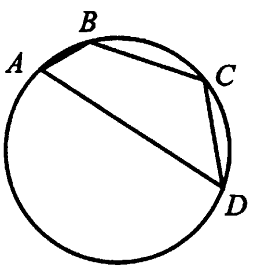


Рис. 33.

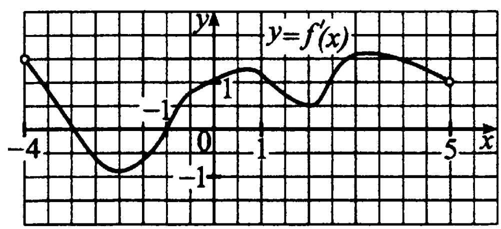


Рис. 34.

B9. На рисунке 34 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 5)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.

B10. Найдите объём пространственного креста, изображённого на рисунке 35, если все изображённые двугранные углы прямые.

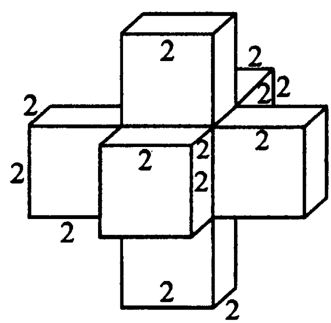


Рис. 35.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $(7^3)^7 : 7^{20}$.

B12. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In, оперативности Op, объективности публикаций Tr, а также качества сайта Q. Каждый отдельный показатель оценивается читателями по 5-балльной шкале целыми числами от 1 до 5.

Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится вчетверо, а оперативность публикаций — вдвое дороже, чем информативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{In + 2Op + 4Tr + Q}{A}.$$

Каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все оценки наибольшие, получило бы рейтинг 1?

B13. Найдите расстояние между вершинами A_1 и E многогранника, изображённого на рисунке 36. Все двугранные углы многогранника прямые.

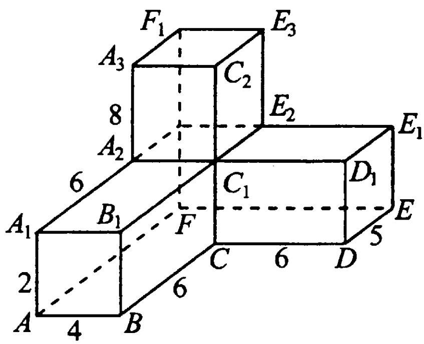


Рис. 36.

B14. Смешали 2 кг 15%-ного водного раствора некоторого вещества с 8 кг 10%-ного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

B15. Найдите наибольшее значение функции $y = 8x - x^3$ на $[-3; 1]$.

При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. Дано уравнение $4 + 5\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 2\sin^2 x$.

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$.

С2. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC сторона основания равна 12, а боковое ребро равно 8. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, на ребре AM — точка L. Известно, что $AD = AE = AL = 4$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D, L.

С3. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \log_{x+14}(13-x)\cdot\log_{x-1}(x+7) \geqslant 0, \\ 25^{x^2-3x+5} - 0{,}2^{x^2-6x-25} \leqslant 0. \end{cases}$$

С4. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке H.

а) Докажите, $\angle BHA_1 = \angle ACB$.

б) Известно, что $BH = 17$, $\angle ABC = 45°$. Найдите AC.

С5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$\left(\log_{13}(2x-a) - \log_{13}(2x+a)\right)^2 + 7a\left(\log_{13}(2x-a) - \log_{13}(2x+a)\right) +$
$+ 12a^2 - a - 1 = 0$ имеет ровно два решения.

С6. Девять членов жюри оценивают выступление танцевальной пары. Каждый из них выставляет оценки — целое число от 0 до 15 включительно. Известно, что все члены жюри поставили различные оценки. По старой системе оценивания оценка пары определяется как среднее арифметическое всех оценок членов жюри. По новой системе оценивания оценка пары определяется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и считается среднее арифметическое семи оставшихся оценок.

а) Может ли разность оценок, полученных парой по старой и по новой системам оценивания, быть равна $\frac{2}{49}$?

б) Может ли разность оценок, полученных парой по старой и по новой системам оценивания, быть равна $\frac{1}{63}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности оценок, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Вариант № 4

Часть 1

Ответом на задания B1–B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. В гостинице имеются только двухместные номера. Прибывшую делегацию из 23 человек разместят в этой гостинице. Найдите, какое минимальное количество номеров будет задействовано?

B2. Тестовое задание с повышенной степенью сложности выполнили 7 школьников, что составляет 4% от общего числа тестируемых. Найдите, сколько школьников участвовало в тестировании.

B3. На диаграмме (см. рис. 37) показано распределение предпочтений отечественных потребителей соковой продукции в 2013 году.

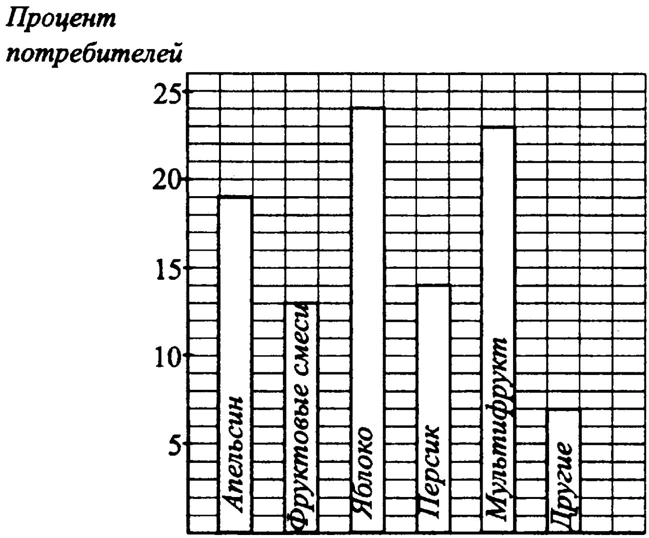


Рис. 37.

Какое место занимает апельсиновый сок среди предпочтений отечественных потребителей?

B4. Рейтинговое агентство определяет рейтинг жидких моющих средств для стиральных машин по соотношению «цена – качество». Рейтинг вычисляется на основе средней цены P, а также оценок эффективности удаления загрязнений F, безопасности и удобства хранения Q и экономичности D, которые эксперты оценивают целыми числами от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле $R = 3(F + Q) + D - 0{,}01P$.

В таблице даны оценки каждого показателя для нескольких марок моющих средств. Определите, какое моющее средство имеет наименьший рейтинг. В ответ запишите значение этого рейтинга.

Марка моющего средства	**Средняя цена**	**Эффективность**	**Удобство и безопасность хранения**	**Экономичность**
А	98	1	3	1
Б	169	2	3	2
В	186	3	4	3
Г	334	4	4	4

B5. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 38). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

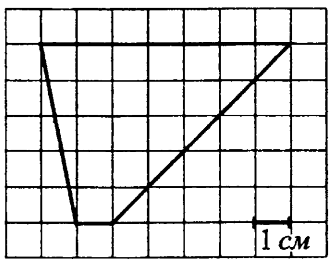


Рис. 38.

B6. В соревнованиях по метанию копья участвуют 4 спортсмена из Германии, 6 спортсменов из Дании, 11 спортсменов из Швеции и 9 из Греции. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Дании.

B7. Решите уравнение $(3x+1)^2 = (3x-4)^2$.

B8. В треугольнике ABC угол C равен 108°, биссектриса CD является перпендикуляром к AB (см. рис. 39). Найдите угол DBC. Ответ выразите в градусах.

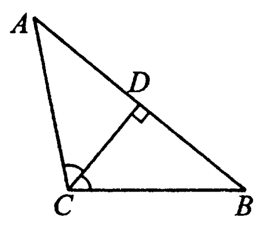


Рис. 39.

B9. На рисунке 40 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 5)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.

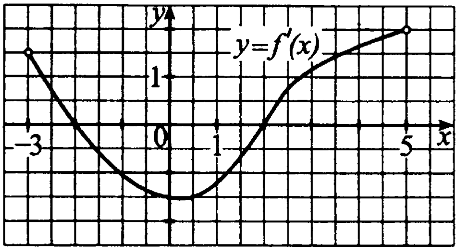


Рис. 40.

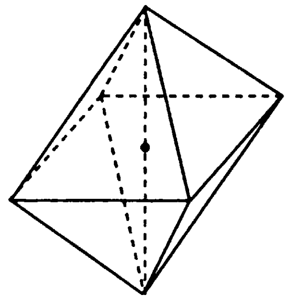


Рис. 41.

B10. Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра (см. рис. 41), если каждое ребро увеличить в 7,1 раз?

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $\dfrac{12b-(12b)^2}{b-12b^2}$.

B12. Опорные башмаки шагающего экскаватора, имеющего массу 900 тонн, представляют собой две пустотелые балки длиной 15 метров и шириной s метров каждая. Давление экскаватора на почву, выражаемое в килопаскалях, определяется формулой $p = \dfrac{mg}{2ls}$, где m — масса экскаватора (в тоннах), l — длина балок в метрах, s — ширина балок в метрах, $g = 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения. Определите наименьшую возможную ширину опорных балок, если известно, что давление p не должно превышать 120 кПа. Ответ выразите в метрах.

B13. Найдите квадрат расстояния между вершинами A_1 и C_2 многогранника, изображённого на рисунке 42.

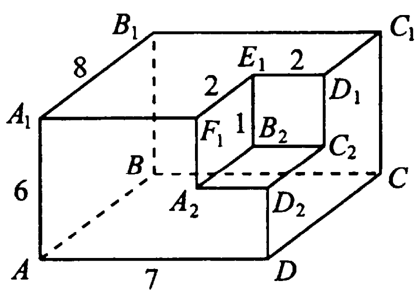


Рис. 42.

B14. Имеется два сосуда. Первый содержит 75 кг, а второй — 50 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 42% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 50% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

B15. Найдите наименьшее значение функции $y = -x^3 + 3x + 7$ на $[-3; 3]$.

При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. Дано уравнение $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x - 4\sin x + 2\sqrt{3} = 0$.

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$.

C2. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC сторона основания равна 3, а боковое ребро равно 4. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, на ребре AM — точка L. Известно, что $CD = BE = 2$, $LM = \frac{8}{3}$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D, L.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{x+5}(4-x)\cdot\log_{x+3}(x+4) \leqslant 0, \\ 8^{x^2+2x-9} - 0{,}25^{0{,}5x^2-5x-4} \leqslant 0. \end{cases}$$

C4. В остроугольном треугольнике ABC высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle BHC_1 = \angle BAC$.

б) Известно, что $BC = 25$, $\angle BAC = 60°$. Найдите AH.

C5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(\log_2(x+3a) - \log_2(x-3a)\right)^2 - 13a\left(\log_2(x+3a) - \log_2(x-3a)\right) + 40a^2 - 3a - 1 = 0$$ имеет ровно два решения.

C6. Восемь членов жюри оценивают выступление вокального коллектива. Каждый из них выставляет оценки — целое число от 0 до 13 включительно. Известно, что все члены жюри поставили различные оценки. По старой системе оценивания оценка коллектива определяется как среднее арифметическое всех оценок членов жюри. По новой системе оценивания оценка коллектива определяется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и считается среднее арифметическое шести оставшихся оценок.

а) Может ли разность оценок, полученных коллективом по старой и по новой системам оценивания, быть равна $\frac{1}{9}$?

б) Может ли разность оценок, полученных коллективом по старой и по новой системам оценивания, быть равна $\frac{1}{24}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности оценок, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Вариант № 5

Часть 1

Ответом на задания B1–B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. Поезд Волгоград — Москва отправляется в 13:20, а прибывает в 6:20 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

B2. По статистике из 1000 машин 20 имеют брак. Найдите, какой процент от общего количества машин составляют бракованные.

B3. На диаграмме (см. рис. 43) показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа — Новая Гвинея, десятое — Индия. Какое место занимал Лаос?

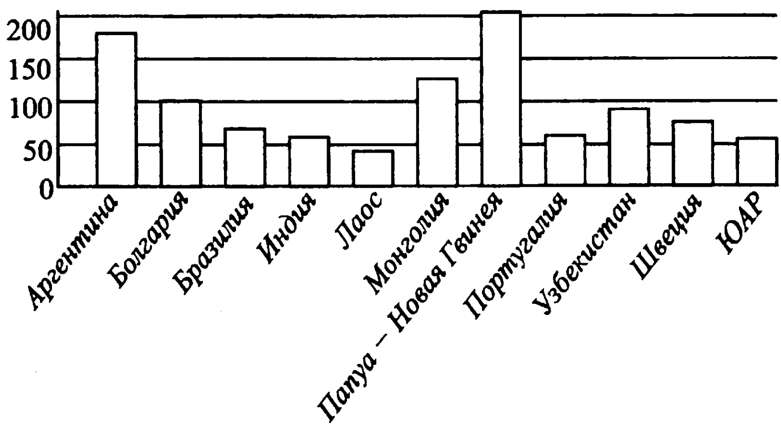


Рис. 43.

B4. Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P (в рублях), а также показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Рейтинг вычисляется по формуле

$R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P.$

В таблице даны цены и показатели четырёх моделей пароварок.

Модель пароварки	Цена пароварки (руб. за шт.)	Функциональность	Качество	Дизайн
А	890	2	1	1
Б	1469	4	3	2
В	1789	4	4	4
Г	1564	2	1	4

Найдите наивысший рейтинг пароварки из представленных в таблице моделей.

B5. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (1; 0), (1; 8), (8; 3), (8; 7) (см. рис. 44).

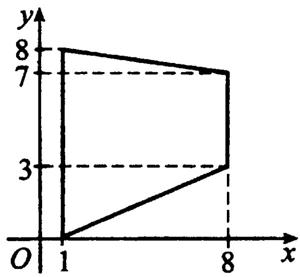


Рис. 44.

B6. Вероятность того, что во встрече двух баскетбольных команд «Солнышко» и «Ветерок» разница в счёте будет меньше 50 очков, равна 0,94. Вероятность того, что разница в счёте окажется меньше 15 очков, равна 0,56. Найдите вероятность того, что разница в счёте будет от 15 до 49 очков.

B7. Найдите корень уравнения $x^2 + 7 = (7 + x)^2$.

B8. Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к стороне, принадлежит противоположной стороне. Большая сторона параллелограмма равна 14. Найдите меньшую сторону параллелограмма (см. рис. 45).

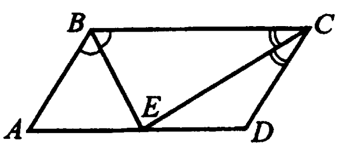


Рис. 45.

B9. Прямая $y = 3{,}2x - 4$ параллельна касательной к графику функции $y = 2x^2 + 3x - 5$. Найдите абсциссу точки касания.

B10. Объём цилиндра равен 6. У конуса радиус основания в 3 раза больше, а высота в 2 раза меньше. Найдите объём конуса.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $(\sqrt{14} - \sqrt{56}) \cdot \sqrt{14}$.

B12. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 160 - 20p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 300 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

B13. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и C_2 многогранника, изображённого на рисунке 46. Все двугранные углы многогранника прямые.

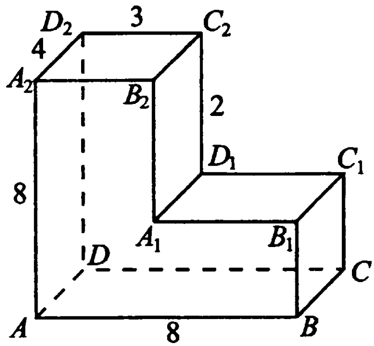


Рис. 46.

B14. От пристани A к пристани B, расстояние между которыми 150 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 2 ч 30 мин после этого вслед за ним со скоростью на 10 км/ч большей отправился второй. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт B он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

B15. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x^2$ на отрезке $[-2; 5]$.

При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $\sin \frac{\pi + x}{2} + \cos(\pi + x) = 1$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[5\pi; \frac{26\pi}{3}\right]$.

С2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны рёбра: $AB = 6$, $AA_1 = 16$. Точка K принадлежит ребру AA_1 и делит его в отношении $3 : 5$, считая от вершины A_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки K и C_1 параллельно ребру AB.

С3. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{4-x} \dfrac{x+5}{(x-4)^2} \geqslant -2, \\ x^3 + 7x^2 + \dfrac{27x^2 + 5x - 25}{x-5} \leqslant 5. \end{cases}$

С4. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке P, на первой окружности взята точка Q_1, на второй — Q_2, при этом точки Q_1 и Q_2 лежат по разные стороны от прямой O_1O_2, $O_1Q_1 \parallel O_2Q_2$.

а) Докажите, что отрезок Q_1Q_2 проходит через точку P.

б) Найдите радиус второй окружности, если радиус первой равен 4, $Q_1O_2 = 4\sqrt{7}$ и $\angle PO_2Q_2 = 60°$.

С5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y - 1 = ax^2, \\ x - \sqrt{48 - y^2 - 8y} = 2 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

С6. В корзине лежат 1000 конфет (по 100 штук каждого из 10 видов).

а) Какое наименьшее число конфет нужно взять, чтобы среди них гарантированно были хотя бы 2 разные?

б) Какое наименьшее число конфет нужно взять, чтобы среди них гарантированно были хотя бы 6 конфет заданного вида?

в) Какое наибольшее число конфет можно взять, чтобы после этого гарантированно осталось не менее чем по 10 конфет не менее чем 5 видов?

Вариант № 6

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

В1. В общежитии техникума в каждой комнате можно поселить четырёх человек. Какое наименьшее количество комнат необходимо для поселения 67 иногородних студентов?

В2. Электричка находится в пути между двумя пунктами 1 час 15 минут. Найдите, какой процент составляет это время от общего времени пути, которое составляет 6 часов 15 минут.

B3. Когда самолёт находится в горизонтальном полёте, подъёмная сила, действующая на его крылья, зависит только от скорости. На рисунке 47 изображена эта зависимость для некоторого самолёта. На оси абсцисс откладывается скорость (в км/ч), на оси ординат — сила (в тонна-силах). Определите по рисунку, чему равна подъёмная сила (в тонна-силах) при скорости 400 км/ч.

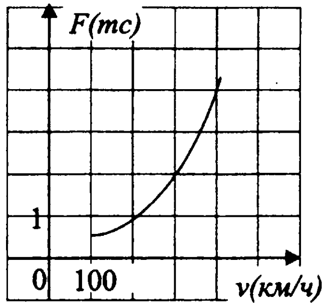


Рис. 47.

B4. Автомобильный журнал определяет рейтинг автомобилей на основе показателей безопасности S, комфорта C, функциональности F, качества Q и дизайна D. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}.$$

В таблице даны показатели трёх моделей автомобилей.

Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	2	5	2	4	3
Б	3	3	3	5	5
В	5	4	4	4	4

Найдите наивысший рейтинг автомобиля из представленных в таблице моделей.

B5. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (3; 1), (7; 1), (7; 7), (9; 7) (см. рис. 48).

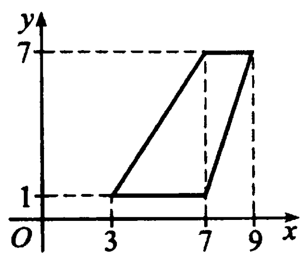


Рис. 48.

B6. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 3, но не дойдя до отметки 9.

B7. Найдите корень уравнения
$(2x - 9)^3 = -125$.

B8. Сторона AC треугольника ABC равна 240. Противолежащий ей угол C равен 30°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

B9. На рисунке 49 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 8)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

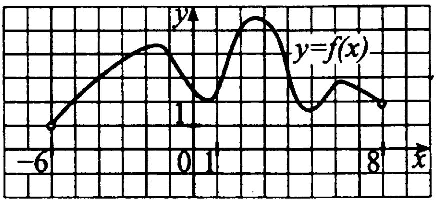


Рис. 49.

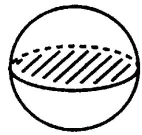


Рис. 50.

B10. Площадь большого круга шара равна 7,5 (см. рис. 50). Найдите площадь поверхности шара.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $\left(\frac{1}{3b-5} - \frac{1}{3b+5}\right) \cdot (9b^2 - 25)$.

B12. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 150 - 20p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 250 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

B13. В правильной треугольной пирамиде $AMPL$ медианы основания MPL пересекаются в точке C. Площадь треугольника MPL равна 15, объём пирамиды равен 4. Найдите длину отрезка CA.

B14. От пристани A к пристани B, расстояние между которыми 180 км по морю, отправился катер. Через 8 часов после этого следом за ним отправился второй катер со скоростью на 6 км/ч большей. Найдите скорость второго катера, если в пункт B он прибыл одновременно с первым катером. Ответ дайте в км/ч.

B15. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln x - x$ на интервале $(0; 3)$.

При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $\cos\dfrac{2\pi + x}{2} + \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{x}{2}\right) = 2\cos x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[6\pi; \dfrac{26\pi}{3}\right]$.

C2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 5$. Точки M и N — середины рёбер верхнего основания C_1D_1 и C_1B_1. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки B, N и M.

C3. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{5-x}\dfrac{x+6}{(x-5)^2} \geqslant -2, \\ x^3 + 2x^2 - \dfrac{7x^2 - 6x + 24}{x - 4} \leqslant 6. \end{cases}$

C4. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке Q, прямая M_1M_2 проходит через точку Q, при этом M_1 лежит на первой окружности, M_2 — на второй, а точка O_1 не лежит на этой прямой.
а) Докажите, что O_1M_1 параллельна O_2M_2.
б) Найдите периметр четырёхугольника $O_1M_1O_2M_2$, если радиус первой окружности — 4, радиус второй — 6, а расстояние между прямыми O_1M_1 и O_2M_2 равно 8.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a - |3x| = \sqrt{1 - 2x}$ имеет более двух корней.

C6. В сказочной стране k населённых пунктов и 2015 дорог. Никакие 2 населённых пункта не связывает больше 1 дороги, и любая дорога связывает ровно 2 населённых пункта.
а) Может ли k быть равно 20?
б) Какое наименьшее значение может иметь k, если из любого города можно добраться в любой другой (возможно, с заездом в промежуточные города)?
в) При каком наибольшем значении k для любого способа расстановки дорог (согласно условию) останется верным утверждение, что из любого города можно добраться в любой другой (возможно, с заездом в промежуточные города)?

Вариант № 7

Часть 1

Ответом на задания B1–B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. В доме, в котором живёт Саша, один подъезд. На каждом этаже по четыре квартиры. Саша живёт в квартире № 51. На каком этаже живёт Саша?

B2. На счету мобильного телефона Максима было 215 рублей, а после разговора с бабушкой осталось 160 рублей. Сколько минут длился разговор с бабушкой, если одна минута разговора стоит 2 рубля 50 копеек?

B3. В аэропорту чемоданы пассажиров поднимают в зал выдачи багажа по транспортёрной ленте. При проектировании транспортёра необходимо учитывать допустимую силу натяжения его ленты. На рисунке 51 изображена зависимость натяжения ленты от угла наклона транспортёра к горизонту при расчётной нагрузке. На оси абсцисс откладывается угол подъёма (в градусах), а на оси ординат — сила натяжения транспортёрной ленты (в килограмм-силах). При каком угле наклона сила натяжения достигает 200 кгс? Ответ дайте в градусах.

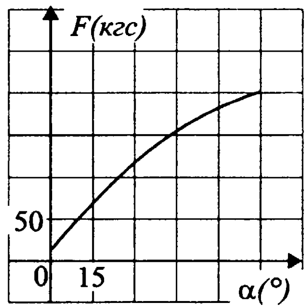


Рис. 51.

B4. Независимое агентство каждый месяц определяет рейтинг новостных сайтов на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Рейтинг вычисляется по формуле $R = 25\left(\frac{2In + Op + 3Tr}{6} + 2\right)$.

В таблице даны показатели четырёх новостных сайтов.

Сайт	Информативность	Оперативность	Объективность
А	1	−2	0
Б	−2	1	1
В	2	1	0
Г	1	1	1

Найдите наивысший рейтинг новостного сайта из представленных в таблице.

B5. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 52.

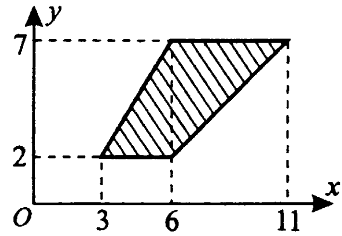


Рис. 52.

B6. Научная конференция проводится в 4 дня. Всего запланировано 50 докладов — первые три дня по 14 докладов, остальные в четвёртый день. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора Н. окажется запланированным на последний день конференции?

B7. Найдите корень уравнения $11^{2-x} = 121$.

B8. Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 3 (см. рис. 53).

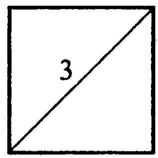


Рис. 53.

B9. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^2 - t + 3$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите скорость этой точки (в метрах в секунду) в момент времени $t = 5$ с.

B10. Куб описан около сферы радиуса 2. Найдите объём куба.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $c^7 : c^{11} \cdot c^6$ при $c = 0{,}5$.

B12. Скорость автомобиля v, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l км с постоянным ускорением a км/ч^2, вычисляется по формуле $v^2 = 2la$. Определите, с какой наименьшей скоростью будет двигаться автомобиль на расстоянии 0,4 километра от старта, если по конструктивным особенностям автомобиля приобретаемое им ускорение не меньше 8000 км/ч^2. Ответ выразите в км/ч.

B13. В правильной треугольной пирамиде $ARGM$ медианы основания RGM пересекаются в точке K. Объём пирамиды равен 34, $AK = 17$. Найдите площадь треугольника RGM.

B14. Имеется два сплава. Первый содержит 15% золота, второй — 2% золота. Масса первого сплава 3 кг, масса второго — 7 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав. Найдите процентное содержание золота в полученном сплаве.

B15. Найдите наибольшее значение функции $y = (x+5)^2(x-3) - 6$ на отрезке $[-5; 0]$.

При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $\cos x + \sin x = \dfrac{\sin 2x}{2} - 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

C2. В прямой треугольной призме основанием является равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, равным 8, и боковой стороной, равной 10. Боковое ребро призмы равно 3,2. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через ребро BC и вершину A_1.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2+3x-5}{x+1} - \dfrac{2}{x-2} \leqslant 2x, \\ \log_7(x^2-6x+9) \leqslant 2. \end{cases}$$

C4. В треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M и образуют четырёхугольник A_1MB_1C, который является описанным.

а) Докажите, что $AC = CB$.

б) Найдите площадь A_1MB_1C, если $AB = 10$, $AC = 12$.

C5. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 4, \\ y = |x-a| + 3a \end{cases}$$

имеет ровно одно решение?

C6. Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$, при этом $a_1 = 21$, $a_2 = 40$. Найдите наименьшее значение n в каждом из следующих случаев:

а) $a_1 + \ldots + a_n$ делится на 19.

б) $a_3^{2015} + \ldots + a_n^{2015}$ делится на 19.

в) $a_1^{b_1} + \ldots + a_n^{b_n}$ делится на 19, где $\{b_m\}$ — арифметическая прогрессия, при этом $b_1 = 7$, $b_2 = 26$.

Вариант № 8

Часть 1

Ответом на задания B1–B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. В доме, в котором живёт Костя, 1 подъезд, а на каждом этаже по 7 квартир. На каком этаже живёт Костя, если известно, что он живёт в квартире № 44?

B2. Рост Билла 5 футов 2 дюйма. Выразите рост Билла в сантиметрах, если в футе 12 дюймов, а в дюйме 2,54 см. Результат округлите до целого числа.

B3. На диаграмме (см. рис. 54) показано количество посетителей сайта новостей во все дни с 10 по 29 ноября 2013 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за день. Определите по диаграмме, какого числа количество посетителей сайта новостей приняло наименьшее значение.

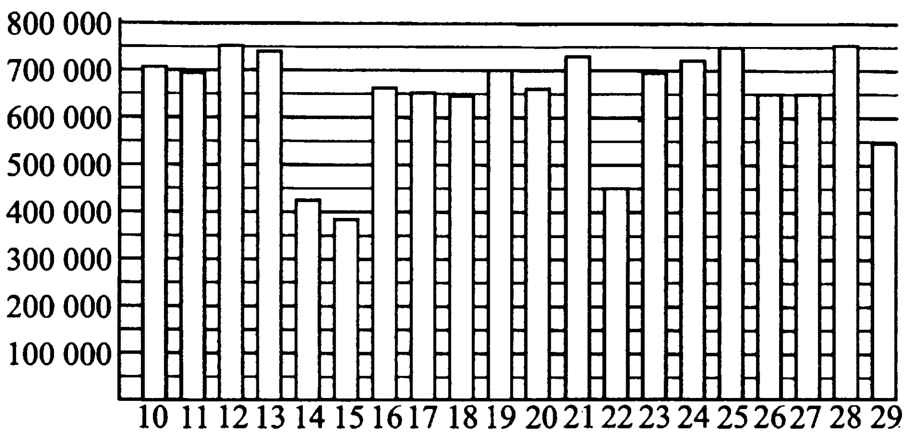


Рис. 54.

B4. Для транспортировки 59 тонн груза на 1500 км можно воспользоваться услугами одной из трёх фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъёмность автомобилей для каждого перевозчика указаны в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку?

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъёмность автомобилей (тонн)
«Агат»	2900	5
«Изумруд»	3100	7
«Жемчужина»	3600	8

B5. Окружность с центром в начале координат проходит через точку $M(12;\ 5)$ (см. рис. 55). Найдите её радиус.

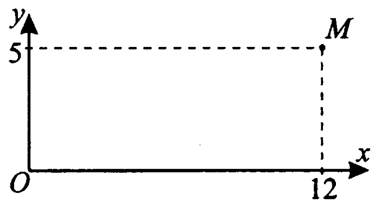


Рис. 55.

B6. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,05. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

B7. Найдите корень уравнения $216^{-x+4} = 6^x$.

B8. Угол между двумя соседними сторонами правильного многоугольника, вписанного в окружность, равен 150°. Найдите число вершин многоугольника.

B9. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 5t + 19$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 25 м/с?

B10. Три боковых ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, их длины равны 3, 7 и 5. Найдите объём пирамиды.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $49^{\sqrt{3}+2} : 7^{2+2\sqrt{3}}$.

B12. Автомобиль, масса которого равна $m = 1400$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остаётся неизменным, и проходит за это время путь $S = 700$ метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, равно $F = \frac{2mS}{t^2}$. Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдёт указанный путь, если известно, что сила F, приложенная к автомобилю, не меньше 2500 Н. Ответ выразите в секундах.

В13. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с рёбрами $AB = 12$, $BC = 5$, $CC_1 = 3\sqrt{3}$ найдите расстояние между точками B_1 и D.

В14. Первая труба пропускает на 15 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 300 литров она заполнит на 18 минут быстрее, чем первая труба?

В15. Найдите наименьшее значение функции $y = (x-3)^2(x+1) + 2$ на отрезке $[-1; 5]$.

При выполнении заданий С1—С6 требуется записать полное решение и ответ.

С1. а) Решите уравнение $\dfrac{2\sin x + 1}{\sin x} = 3\operatorname{tg} x \cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

С2. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведено сечение через точку пересечения медиан треугольника ABC и точку A_1 параллельно ребру BC. Найдите площадь этого сечения, если треугольник ABC — равнобедренный с боковой стороной, равной 5, и основанием $AC = 8$, а высота призмы равна 6.

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_4(x+2) \leqslant \log_{4x+8} 16, \\ \dfrac{4}{x+2} + \dfrac{3}{x-1} \leqslant \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{4}{x-2}. \end{cases}$$

С4. В треугольнике ABC с углом A, равным $60°$, биссектрисы BD и CM пересекаются в точке L.

а) Докажите, что $LD = LM$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $AMLD$, если $AL = 10$, $ML = 6$, при условии, что $\triangle ABC$ — неравносторонний.

С5. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} (x+5)^2 + (y-5)^2 = 16, \\ y = 5a - |x-a|, \end{cases}$$

имеет ровно одно решение?

С6. Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$, при этом $a_1 = 8$, $a_2 = 25$. Найдите наименьшее значение k в каждом из следующих случаев:

а) $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ делится на 17;

б) $a_7^{3007} + a_8^{3007} + \ldots + a_k^{3007}$ делится на 17;

в) $a_1^{b_1} + a_2^{b_2} + \ldots + a_k^{b_k}$ делится на 17, где $\{b_m\}$ — арифметическая прогрессия, при этом $b_1 = 3$, $b_2 = 20$.

Вариант № 9

Часть 1

Ответом на задания В1—В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

В1. В доме, в котором живёт Дима, 9 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже находится по 4 квартиры. Дима живёт в квартире № 174. В каком подъезде живёт Дима?

В2. Диагональ картины равна 96 дюймам. Выразите диагональ картины в сантиметрах, если в одном дюйме 2,54 см. Результат округлите до целого числа.

В3. На графике 56 изображена зависимость крутящего момента автомобильного двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту. На оси ординат — крутящий момент в $H \cdot$м. Чтобы автомобиль начал движение, крутящий момент должен быть не менее $60 H \cdot$м. Какое наименьшее число оборотов двигателя в минуту достаточно, чтобы автомобиль начал движение?

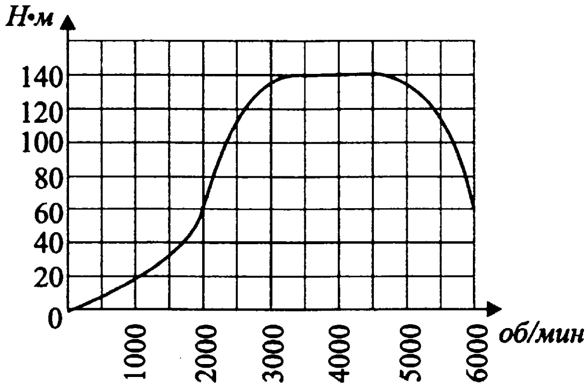


Рис. 56.

B4. Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за 1 мин разговора
Повременный	150 руб. в месяц	0,4 руб.
Комбинированный	265 руб. в месяц за 300 мин	0,24 руб. (сверх 300 мин в месяц)
Безлимитный	360 руб.	нет

Абонент выбрал наиболее дешёвый тарифный план, исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров составит 550 минут в месяц. Какую сумму он должен заплатить за месяц, если общая длительность разговоров в этом месяце действительно будет равна 550 минутам? Ответ дайте в рублях.

B5. Найдите ординату точки, симметричной точке $A(7;\ 5)$ относительно оси Ox (см. рис. 57).

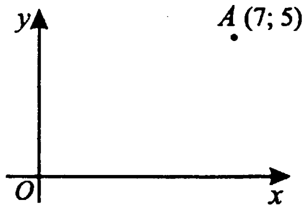


Рис. 57.

B6. В среднем из 1200 лампочек, поступивших в продажу, 6 неисправны. Найдите вероятность того, что одна случайно выбранная для контроля лампочка исправна.

B7. Найдите корень уравнения $2^{14-2x} = \frac{1}{8}$.

B8. Угол ACO равен 38°. Его сторона CA касается окружности с центром в точке O. Найдите градусную величину дуги $\smile AD$ окружности, заключённой внутри этого угла (см. рис. 58).

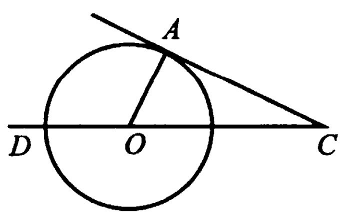


Рис. 58.

B9. На рисунке 59 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 3x + 2$ или совпадает с ней.

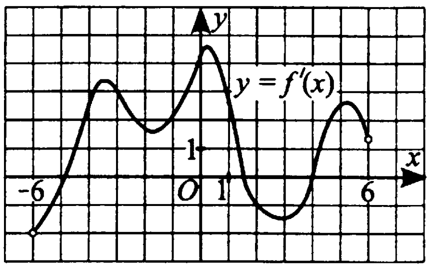


Рис. 59.

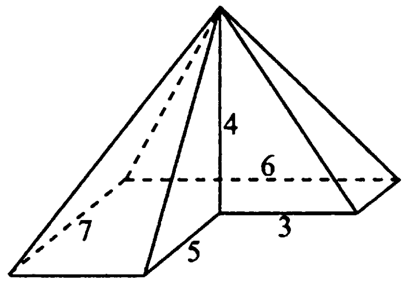


Рис. 60.

B10. Найдите объём пирамиды, изображённой на рисунке 60. Её основанием является многоугольник, соседние стороны которого перпендикулярны, а одно из боковых рёбер перпендикулярно плоскости основания и равно 4.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $\dfrac{25}{\sin^2 43^\circ + \cos^2 223^\circ}$.

B12. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m\left(\dfrac{v^2}{L} - g\right)$, где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, $g = 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения. С какой наименьшей скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 115,6 см? Ответ выразите в м/с.

B13. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AD = 12$, $CC_1 = 3\sqrt{39}$, $AB = 9$ (см. рис. 61). Найдите длину диагонали AC_1.

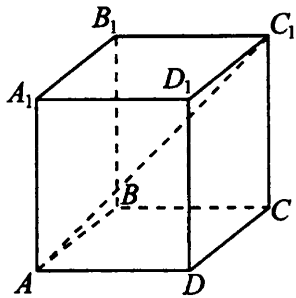


Рис. 61.

B14. Первый рабочий делает 84 заготовки на 3 часа быстрее, чем второй рабочий. Сколько заготовок в час делает второй рабочий, если первый рабочий за час делает на 9 заготовок больше второго.

B15. Найдите наибольшее значение функции $y = (x+7)^2(x-2)+10$ на отрезке $[-1; 3]$.

При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} = 1.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right]$.

C2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S стороны основания равны 8, а боковые рёбра равны $8\sqrt{5}$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра SD параллельно прямой AC.

C3. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 25^{x-1} - 27\cdot 5^{x-2} + 2 \geqslant 0, \\ \log_x(x^2 - 12x + 36) \leqslant 0. \end{cases}$$

C4. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке K. Известно, что $AC = 6KB_1$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите длину отрезка EF, где E — точка касания стороны AC и вписанной в треугольник окружности, F — точка касания стороны AC и окружности, касающейся стороны AC и продолжений сторон BA и BC треугольника ABC, если известно, что $AB = 6$, $AC = 10$.

C5. Найдите все значения параметра a, для которых неравенство $x^2 + 3x - 3 + |x - a| > 1$ выполняется при всех x.

C6. На психологический тренинг пришли m человек. В начале работы психолог попросил каждого пришедшего написать записку с вопросом к любому другому из участников (ровно одному). После этого в группу A были отобраны те, кто получил не более 1 вопроса.

а) Какое наибольшее число участников могло оказаться в группе A, если $m = 100$?

б) Какое наименьшее число участников могло оказаться в группе A, если $m = 144$?

в) Какое наименьшее число участников могло оказаться в группе A, если $m = 97$, а в группу A вошли те, кто не получил ни одного вопроса и половина тех, кто получил ровно один вопрос (если ровно один вопрос получило нечётное число человек, то берётся наибольшее число, не превосходящее половину)?

Вариант № 10

Часть 1

Ответом на задания B1–B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. Порция мороженого «Пломбир» стоит 24 рубля 50 копеек. Какое наибольшее число порций можно купить на 260 рублей?

B2. Участниками областной олимпиады по русскому языку стали 76 человек, что составило четвёртую часть всех участников областных олимпиад за год. Найдите, сколько учеников приняли участие в областных олимпиадах в этом году.

B3. На графике (см. рис. 62) показана среднесуточная температура воздуха в Калининграде с 1 по 22 июня 2011 года. На оси абсцисс отмечены дни месяца. На оси ординат — температура воздуха. Определите по графику наибольшую температуру воздуха в период с 5 по 9 июня.

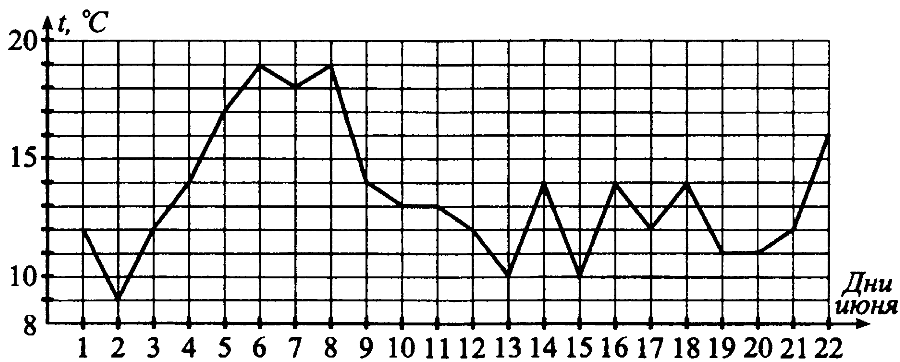


Рис. 62.

B4. Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	**Абонентская плата**	**Плата за трафик**
«Ветер»	Нет	0,7 руб. за 1 Мб
«Апрель»	320 руб. за 700 Мб трафика в месяц	0,6 руб. за 1 Мб сверх 700 Мб
«Весна»	500 руб. за 1000 Мб трафика в месяц	0,9 руб. за 1 Мб сверх 1000 Мб

Пользователь предполагает, что трафик составит 850 Мб в месяц и, исходя из этого, выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 850 Мб?

B5. Найдите площадь закрашенной фигуры на координатной плоскости (см. рис. 63).

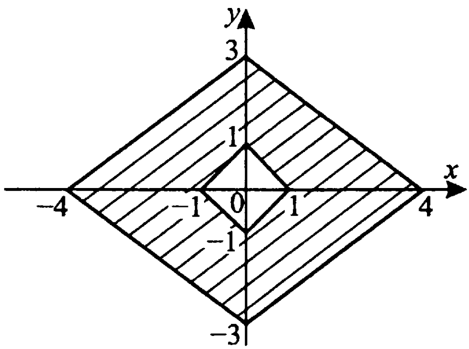


Рис. 63.

B6. В мастерской собирают компьютеры. В среднем на 50 качественных компьютеров приходится 7 компьютеров со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что компьютер, выбранный наугад из числа собранных в этой мастерской, окажется качественным. Результат округлите до сотых.

B7. Найдите корень уравнения $3^{5x-17} = \frac{1}{27}$.

B8. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 10$, $AC = \sqrt{91}$. Найдите косинус внешнего угла при вершине B.

B9. На рисунке 64 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 4)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -3x + 10$ или совпадает с ней.

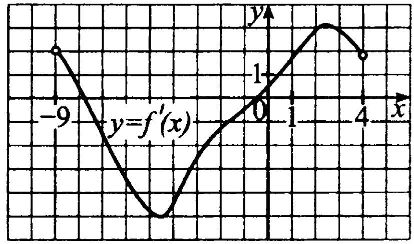


Рис. 64.

B10. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Объём меньшего конуса равен 15. Определите объём исходного конуса.

Часть 2

Ответом на задания B11—B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{3}}{6}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

B12. Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу со скоростью $v = 5$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \frac{m}{m+M} v\cos\alpha$ (м/с), где $m = 70$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 430$ кг — масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,35 м/с?

B13. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $BD_1 = 27$, $BB_1 = 2\sqrt{26}$, $AB = 24$ (см. рис. 65). Найдите длину AD.

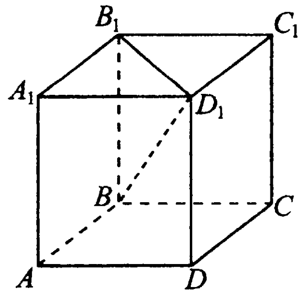


Рис. 65.

B14. Токарь выполняет работу по изготовлению 72 деталей на 4 часа быстрее, чем его напарник. Сколько деталей в час делает напарник, если первый токарь за час делает на 3 детали больше?

B15. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{-x^2 - 2x + 2}$.

При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

С1. а) Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x}{\cos(\pi - x)} = -\sqrt{3}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{9\pi}{4}; -\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

С2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S стороны основания равны 8, а боковые рёбра равны 16. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку A и середину ребра SC параллельно прямой BD.

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 9^{x-2} - 83 \cdot 3^{x-4} + 2 \geqslant 0, \\ \log_x(x^2 - 14x + 49) \leqslant 0. \end{cases}$$

С4. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке K. Известно, что $AB = 3KC$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите длину отрезка EF, где E — точка касания стороны AC и вписанной в треугольник ABC окружности, F — точка касания стороны AC и окружности, касающейся стороны AC и продолжений сторон BA и BC треугольника ABC, если известно, что $AC = 3$, $BC = 4$.

С5. Найдите все значения параметра a, для которых неравенство $x^2 + 5x - 4 + |x - a| > 2$ выполняется при всех x.

С6. На психологический тренинг пришли n человек. В начале работы психолог попросил каждого пришедшего написать записку с вопросом к любому другому из участников (ровно одному). После обработки вопросов всех участников разделили на группы, в каждой из которых никто никому не задавал до этого вопросов, по следующему правилу. Первой стала наибольшая из всех таких возможных групп, второй — наибольшая среди участников, не вошедших в первую группу, третьей — наибольшая среди участников, не вошедших в первые 2 группы, и т.д. Если на каком-то шаге было несколько наибольших групп, психолог определял очередную жребием.

а) Какое наименьшее число групп могло получиться при $n = 20$?

б) Могло ли число групп равняться 6 при $n = 7$?

в) Какое наименьшее число участников может быть в первой группе при $n = 120$?

Вариант № 11

Часть 1

Ответом на задания B1–B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. Лена купила 1 кг 200 г яблок по цене 126 рублей за килограмм. Сколько сдачи она должна получить с 500 рублей? Ответ укажите в рублях.

B2. Стоимость демисезонного пальто со скидкой 17 900 рублей. Найдите, сколько процентов от цены составила скидка, если полная стоимость пальто 22 375 рублей.

B3. На графике (см. рис. 66) жирными точками показана среднесуточная температура воздуха с 1 по 22 января в одном из городов. По горизонтали отмечаются дни месяца, по вертикали — температура воздуха. Для наглядности жирные точки соединены линиями. Укажите наибольшую среднесуточную температуру воздуха в период с 8 января по 17 января. Ответ дайте в градусах Цельсия.

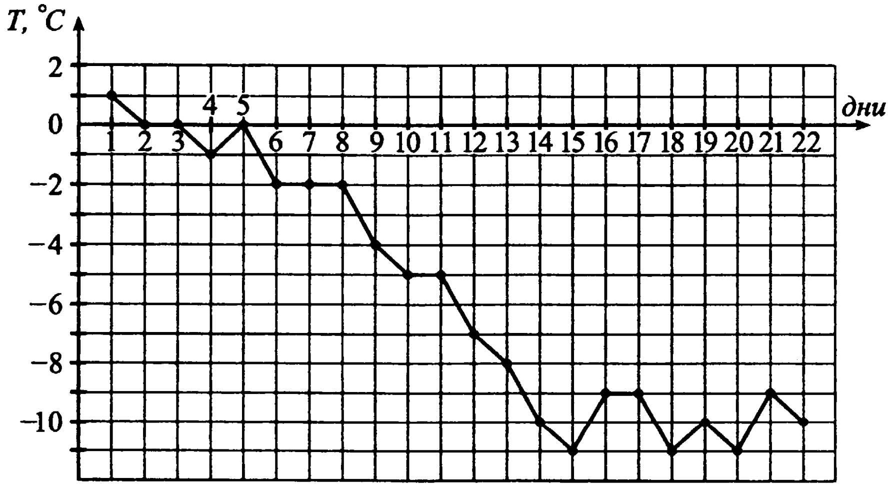


Рис. 66.

B4. Для остекления витрин магазина «Счастье» требуется заказать 90 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла 0,2 м^2. В таблице приведены цены на стекло и на резку стекла. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	**Цена на стекло (руб. за 1 м^2)**	**Цена на резку стекла (руб. за одно стекло)**	**Дополнительные условия**
А	280	21	
Б	300	16	При заказе более 15 м^2 стекла резка — бесплатно
В	290	18	При заказе (без учёта резки) на сумму свыше 6000 руб. резка — бесплатно

B5. Точки $O(0;0)$, $A(6;7)$, $B(5;2)$, $C(1;5)$ являются вершинами четырёхугольника. Найдите ординату точки T пересечения его диагоналей (см. рис. 67).

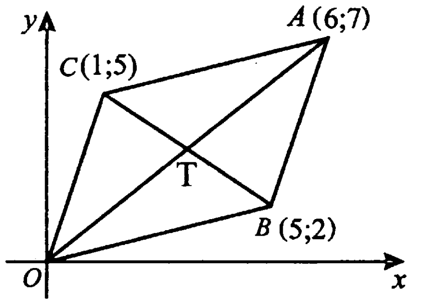


Рис. 67.

B6. Пятеро друзей-автолюбителей взяли автомобиль в аренду для путешествия. С помощью жребия они выбирают двоих, которые в первый день будут поочерёдно водителями. Какова вероятность того, что М., входящий в состав группы, будет водителем в первый день путешествия?

B7. Найдите корень уравнения $\dfrac{x-6}{2x-1} = \dfrac{1}{x+6}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из них.

B8. Один из внешних углов треугольника равен 56°. Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как 2 : 5 (см. рис. 68). Найдите наибольший из них (в градусах).

Рис. 68.

В9. На рисунке 69 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 10)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

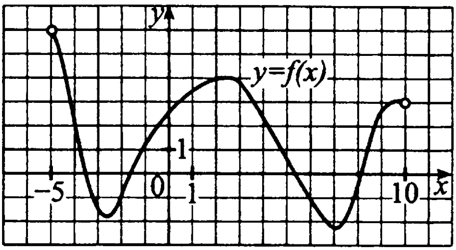


Рис. 69.

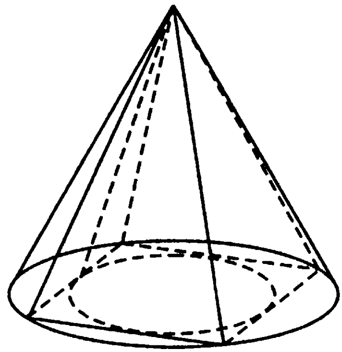


Рис. 70.

В10. Объём конуса, описанного около правильной четырёхугольной пирамиды, равен 20 (см. рис. 70). Найдите объём конуса, вписанного в эту пирамиду.

Часть 2

Ответом на задания В11–В15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

В11. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt[5]{8a^2}\right)^{10}}{a^4}$ при $a \neq 0$.

В12. Для поддержания навеса планируется использовать цилиндрическую колонну. Давление P (в паскалях), оказываемое навесом и колонной на опору, определяется по формуле $P = \dfrac{4mg}{\pi D^2}$, где $m = 270$ кг — общая масса навеса и колонны, D — диаметр колонны (в метрах). Считая ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, а $\pi = 3$, определите наименьший возможный диаметр колонны, если давление, оказываемое на опору, не должно быть больше 640 000 Па. Ответ выразите в метрах.

В13. Высота цилиндра с площадью боковой поверхности π равна 2. Найдите диаметр основания цилиндра.

В14. Каменщики Антон и Петя выкладывают один кирпичный забор за 8 часов, Петя и Дима выполняют эту же работу за 12 часов, а Антон и Дима — за 9,6 часа. Найдите, за сколько часов каменщики выполнят эту работу, если будут работать втроём.

B15. Найдите точку максимума функции $y = -\dfrac{x}{x^2 + 441}$.

При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $\sin 2x + \cos 2x = 1$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{6}; 2\pi\right]$.

C2. Центры двух сфер с радиусами 29 и 35 находятся на расстоянии 48 друг от друга. В бóльшую сферу вписан конус так, что его основанием является окружность, по которой пересекаются сферы, а центр бóльшей сферы лежит внутри конуса. Найдите объём конуса.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)(x-3)} + \dfrac{1}{(x-3)(x-4)} + \dfrac{1}{(x-4)(x-5)} \leqslant \dfrac{3}{4}, \\ 2^{\left(2^{\left(2^x - 4\right)}\right)} > 8. \end{cases}$$

C4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Известно, что площади треугольников AOB и COD равны.

а) Докажите, что $BC \parallel AD$.

б) В $\triangle COD$ проведена высота $OH = 3$, причём $CH = 2$,

$\angle DOH = 2\angle COH$, точка H лежит на отрезке CD. Найдите площадь $\triangle COD$.

C5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{|x|}(x^2 + a) = \log_{|x|+1}(x^2 + a + 1)$ имеет ровно 2 различных корня.

C6. Имеется m одинаковых шоколадок, которые нужно разделить поровну на n школьников. Каждую шоколадку разрешается разломить не более одного раза (необязательно на равные части).

а) Возможно ли требуемое при $m = 12$, $n = 16$?

б) Возможно ли требуемое при $m = 12$, $n = 20$?

в) При каких n требуемое возможно, если $m = 15$?

Вариант № 12

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

В1. Каждый день во время конференции расходуется 60 пакетиков чая. Конференция длится 4 дня. Чай продаётся в пачках по 25 пакетиков. Сколько пачек нужно купить на все дни конференции?

В2. Член клуба «Друзья газеты» имеет 15% скидки на подписку городской газеты. Найдите полную стоимость (в руб.) подписки на газету, если член клуба оплачивает 2550 рублей.

В3. На диаграмме (см. рис. 71) показана температура воздуха в период с 15 июня по 18 июня, измеренная в определённое время, в деревне Клюквинка. Найдите по диаграмме количество измерений, когда температура в городе оказалась ниже 20° C.

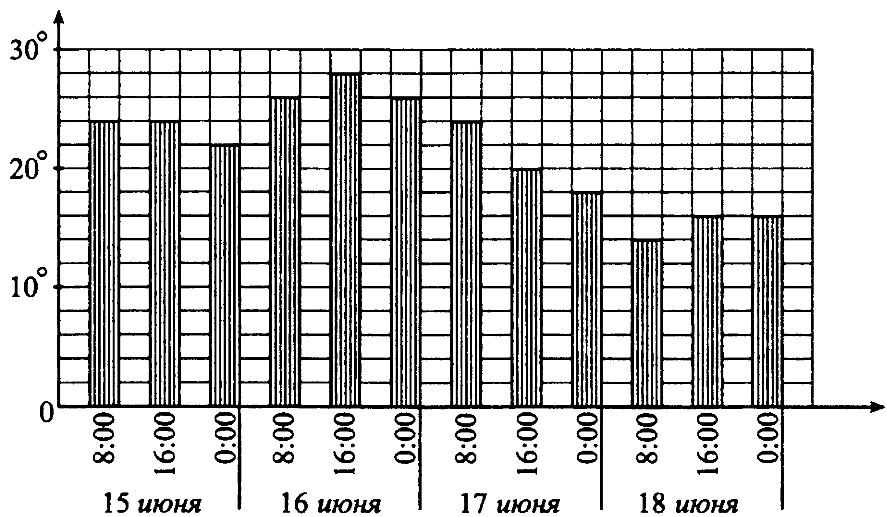


Рис. 71.

В4. Для участия в массовых спортивных выступлениях спортклубу для каждого спортсмена надо приобрести спортивную обувь и майку с символикой России (цена товара не зависит от размера). В таблице представлены цены на вышеуказанные товары в различных фирмах.

Фирма	Цена 1 пары обуви (руб.)	Цена 1 майки (руб.)	Дополнительные условия
А	2800	1000	
Б	2650	1150	При заказе на сумму свыше 500 000 рублей скидка — 50 000 рублей
В	2400	1200	При заказе свыше 520 000 рублей скидка — 15 000 рублей

Определите, сколько стоит самый дешёвый заказ, если участников спортивных выступлений 145 человек. Ответ укажите в рублях.

B5. Найдите площадь S (в см^2) заштрихованной фигуры, изображённой на рисунке 72. В ответе укажите S/π.

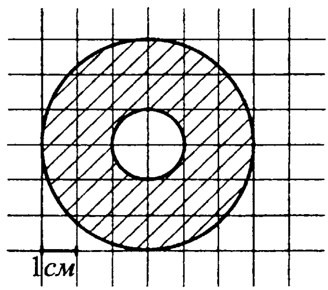


Рис. 72.

B6. Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию «A = сумма очков равна 6»?

B7. Найдите корень уравнения $\frac{x-7}{x+3} = \frac{x-3}{x+9}$.

B8. Около окружности описан многоугольник, площадь которого равна 7,5. Его периметр равен 15. Найдите радиус окружности (см. рис. 73).

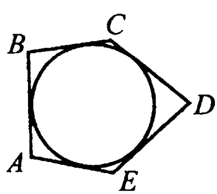


Рис. 73.

B9. На рисунке 74 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 9)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-7; 8]$.

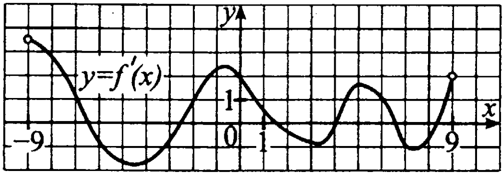


Рис. 74.

B10. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C_1, D прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 15$, $AD = 5$, $AA_1 = 1$.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{p^3} \cdot \sqrt[6]{p}}$ при $p = \dfrac{1}{64}$.

B12. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 35$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 Ом и R_2 Ом их общее сопротивление задаётся формулой $R_{общ} = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$ (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 10 Ом. Ответ выразите в омах.

B13. Высота конуса равна 5, длина образующей — 13. Найдите диаметр основания конуса.

B14. Один токарь может выполнить заказ за 10 часов, второй — за 15 часов, а третий — за 12 часов. За сколько часов три токаря выполнят заказ, работая совместно?

B15. Найдите наибольшее значение функции $y = (10 - x)e^{x-9}$ на отрезке $[8; 10]$.

При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

С1. а) Решите уравнение $\sin 2x - \cos 2x = 1$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{\pi}{3}\right]$.

С2. Центры двух сфер с радиусами 17 и 10 находятся на расстоянии 21 друг от друга. В меньшую сферу вписан конус так, что его основанием является окружность, по которой пересекаются сферы, а центр меньшей сферы лежит вне конуса. Найдите объём конуса.

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)(x-2)} + \dfrac{1}{(x-2)(x-3)} + \dfrac{1}{(x-3)(x-4)} \geqslant -1{,}5. \\ 2^{(2^{(2^x-1)})} \leqslant 32. \end{cases}$$

С4. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O.

а) Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

б) В $\triangle COD$ проведена высота $OH = 6$, причём $CH = 3$, $\angle DOH = 2\angle COH$. Найдите площадь $\triangle DOH$.

С5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{x^2}(|x| + a) = \log_{x^2+1}(|x| + a + 1)$ имеет ровно 2 различных корня.

С6. Имеется m одинаковых шоколадок, которые нужно разделить поровну на n школьников. Каждую шоколадку разрешается разломить не более одного раза (необязательно на равные части).

а) Возможно ли требуемое при $m = 18$, $n = 27$?

б) Возможно ли требуемое при $m = 18$, $n = 28$?

в) При каких n требуемое возможно, если $m = 14$?

Вариант № 13

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

В1. Автомобиль расходует 9 литров бензина на 100 километров пути, а цена бензина — 26 рублей за литр. Сколько рублей потратил автомобилист на путь длиной 2600 км?

В2. Рабочая тетрадь по математике стоит 65 рублей. Сколько рублей сдачи должен получить Максим с 1500 рублей, приобретая 25 тетрадей со скидкой 8%?

В3. На рисунке 75 жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Ростове-на-Дону с 3 по 15 февраля 1999 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало более 2 мм осадков.

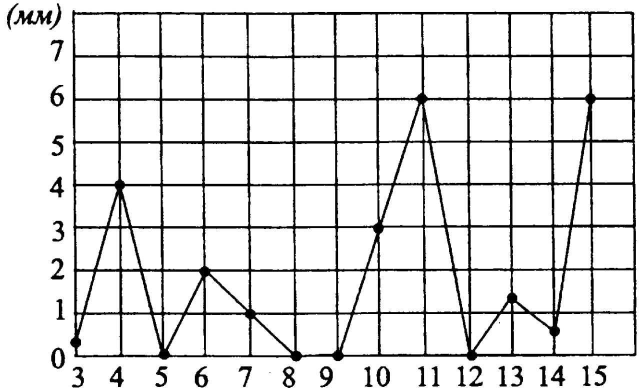


Рис. 75.

В4. Из пункта A в пункт D ведут три дороги. На рисунке 76 показана схема дорог и расстояние (в км) между пунктами по дорогам. Через пункт B идёт грузовик со средней скоростью 26 км/ч. Через пункт C идёт легковой автомобиль со средней скоростью 60 км/ч. Третья дорога без промежуточных пунктов, и по ней движется автобус со средней скоростью 45 км/ч. Все три транспортных средства выехали из A одновременно. Какое из них доберётся до D позже других? В ответе укажите, сколько часов оно находилось в дороге.

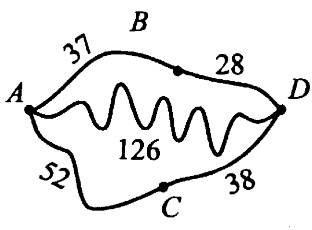


Рис. 76.

B5. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 77).

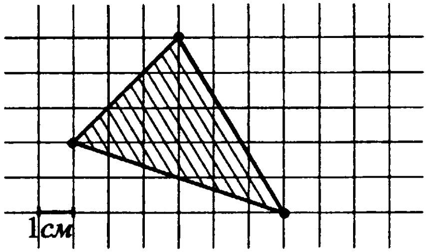


Рис. 77.

B6. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

B7. Найдите корень уравнения $-x = \frac{x+9}{-7x-3}$. Если уравнение имеет больше одного корня, то укажите бóльший из них.

B8. Большее основание равнобедренной трапеции равно 21. Боковая сторона равна 19. Синус острого угла равен $\frac{4\sqrt{21}}{19}$. Найдите меньшее основание (см. рис. 78).

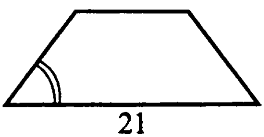


Рис. 78.

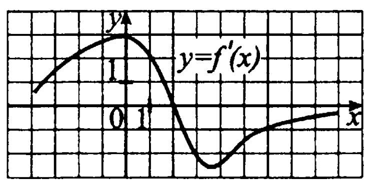


Рис. 79.

B9. На рисунке 79 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $f(x)$ параллельна оси абсцисс.

B10. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, B_1, C_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 5, а боковое ребро равно 3.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $7^{2+\log_7 3}$.

B12. Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h м над землёй, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\dfrac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. На какой наименьшей высоте следует располагаться наблюдателю, чтобы он видел горизонт на расстоянии не менее 6,4 километров? Ответ выразите в метрах.

B13. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 4$, $BC = 6$, $AA_1 = 12$ (см. рис. 80). Найдите длину отрезка DK, где K — середина ребра B_1C_1.

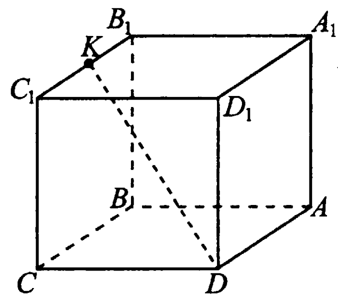


Рис. 80.

B14. Моторная лодка в 9:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, лодка отправилась назад и вернулась в пункт A в 13:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость лодки равна 12 км/ч.

B15. Найдите точку максимума функции $y = (5 - 2x)e^{x+5}$.

При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. Решите уравнение:

а) $4\sin^3 x + 7\sin 2x - 4\sin x = 0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

C2. Около правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания 16 и высотой 12 описана сфера. Найдите радиус этой сферы.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{\log_7(x^2+7) - \log_7(x^2+2x)}{\log_5^2(x+1)} \geqslant 0, \\ (x^2 - 8x - 1 + \cos x)(2^x - 7) \leqslant 0. \end{cases}$$

С4. На окружности радиуса $4\sqrt{3}$ с центром O взяты точки A, B, C, N, D в указанном порядке, при этом N — середина дуги CD, M — точка пересечения хорд NA и DC, L — точка пересечения хорд NB и DC.

а) Докажите, что четырёхугольник $AMLB$ — вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около $AMLB$, если $\smile DA = \smile CB$, $\smile AB = 120°$, $\cos\angle NOC = \frac{1}{4}$ и точка O лежит внутри $AMLB$.

С5. При каких значениях a уравнение $(a^2 - a + 6)x^2 + (a+3)x - 3 = 0$ имеет корни и все они больше $-\frac{1}{2}$?

С6. Для любого натурального числа n обозначим $n!$ произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

а) Найдите цифру, на которую заканчивается 2015!.

б) Найдите наибольшее натуральное k, такое, что 2015! нацело делится на 10^k.

в) Найдите последние 2 цифры числа $1! + 2! + \ldots + 2015!$.

Вариант № 14

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

В1. Водитель легковой машины за месяц проехал 8500 километров. Стоимость 1 литра бензина — 36 рублей. Средний расход бензина на 100 километров составляет 8 литров. Сколько рублей потратил водитель на бензин за этот месяц?

В2. Стоимость одной поездки в маршрутном такси была повышена на 32% и составила 33 рубля. Сколько рублей стоила одна поездка до повышения цены?

В3. На графике (см. рис. 81) жирными точками показана цена барреля нефти в течение восьми дней 2011 года на международных рынках. По оси абсцисс отмечена дата, по оси ординат — цена барреля нефти в долларах на данный период. Для наглядности жирные точки соединены линиями. Определите по графику разницу (в долларах) между наибольшей и наименьшей ценами барреля нефти за указанный период.

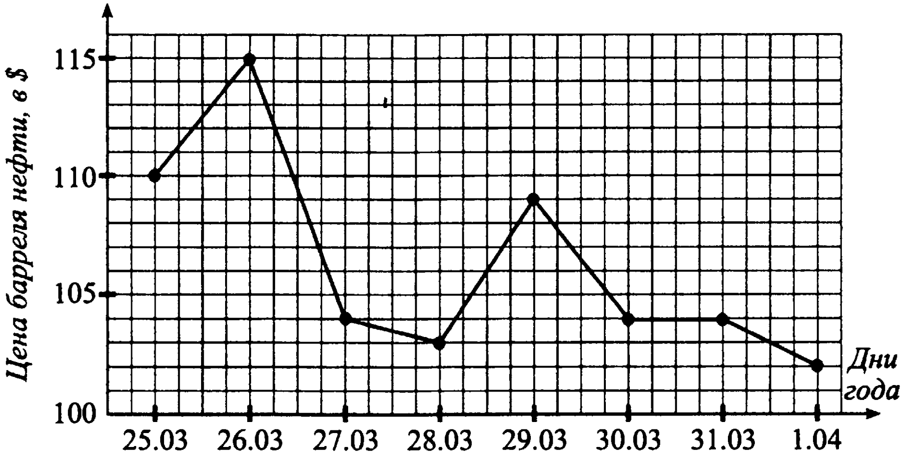


Рис. 81.

B4. В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 45 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки (в руб.)
«Рассвет»	50 руб.	15 мин — 150 руб.	17 руб.
«Сказка»	70 руб.	Нет	15 руб.
«Корсар»	Бесплатно	10 мин — 120 руб.	18 руб.

B5. Найдите площадь прямоугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 82).

B6. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет все четыре раза.

B7. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{9}}(9 - x) = -2$.

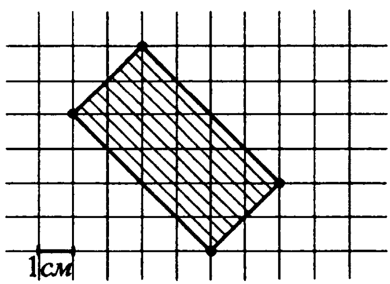


Рис. 82.

B8. В параллелограмме $ABCD$ $\sin C = \frac{\sqrt{51}}{10}$. Найдите $\cos B$ (см. рис. 83).

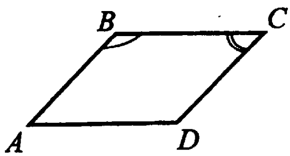


Рис. 83.

B9. На рисунке 84 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 11)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4; 10]$.

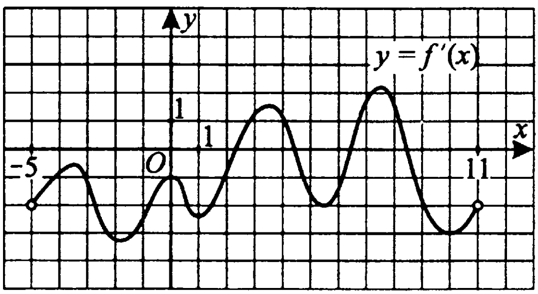


Рис. 84.

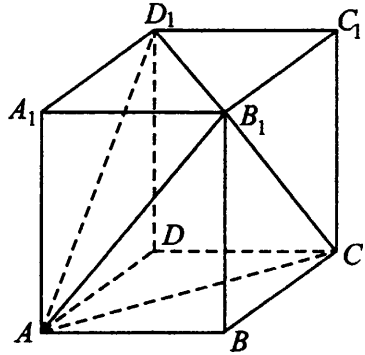


Рис. 85.

B10. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 7,5. Найдите объём треугольной пирамиды AD_1CB_1 (см. рис. 85).

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $\frac{\log_{16} 17^3}{\log_{16} \sqrt{17}}$.

B12. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$, где ε — ЭДС источника (в вольтах), $r = 0{,}5$ Ом — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 8% от силы тока короткого замыкания $I_{\text{кз}} = \frac{\varepsilon}{r}$? (Ответ выразите в омах.)

B13. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $CD = 16$, $BC = 20\sqrt{2}$, $BB_1 = 19$ (см. рис. 86). Найдите длину отрезка MK, где M — середина ребра DC, K — середина ребра A_1D_1.

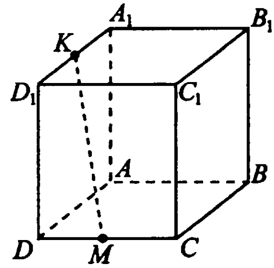


Рис. 86.

B14. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 75 км/ч, проезжает мимо платформы, длина которой равна 150 м, за 24 с. Найдите длину поезда в метрах.

B15. Найдите точку минимума функции $y = (x+4)^2 e^{3-x}$.

При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $4\cos^3 x + 5\sin 2x + 2\cos x = 0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(0; \frac{7\pi}{6}\right]$.

C2. В правильную четырёхугольную пирамиду со стороной основания 18 и высотой 9 вписан шар. Найдите радиус этого шара.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{3^x - 1}{x} \cdot \log_{x+3}(x+5) \geqslant 0, \\ (x^2 + 4x + \sin x + 7)(5^x - 2) \leqslant 0. \end{cases}$$

C4. На окружности радиуса $2\sqrt{3}$ центром O взяты точки M, N, P, K в указанном порядке, S — середина дуги NP. SM и NP пересекаются в точке A, SK и NP в точке B, $\smile MN = \smile KP$.

а) Докажите, что $MABK$ — равнобедренная трапеция.

б) Найдите площадь трапеции, если точка O лежит внутри $MABK$, $\smile MK = 120°$, $\angle SOP = 60°$.

C5. При каких значениях a все корни уравнения

$(3a - a^2 - 9)x^2 + (a-2)x + 1 = 0$ меньше $\frac{1}{3}$?

C6. Для любого натурального числа n обозначим $n!$ произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n$.

а) Найдите наименьшее простое число p, не являющееся делителем числа $500!$.

б) Найдите наибольшее натуральное k, такое, что $3000!$ нацело делится на 160^k.

в) При каких натуральных n количество цифр у чисел $n!$ и n^n совпадает?

Вариант № 15

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

В1. Билет в театр стоит 75 рублей. Какое наибольшее количество билетов можно купить на сумму 2200 рублей?

В2. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата Марии Ивановны 20400 рублей. Какую сумму она получит после вычета налога на доходы? Ответ дайте в рублях.

В3. На диаграмме (см. рис. 87) показано количество посетителей сайта «Сотоварищи» во все дни с 1 по 20 июня. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме разность между наибольшим и наименьшим количеством посетителей за указанные дни.

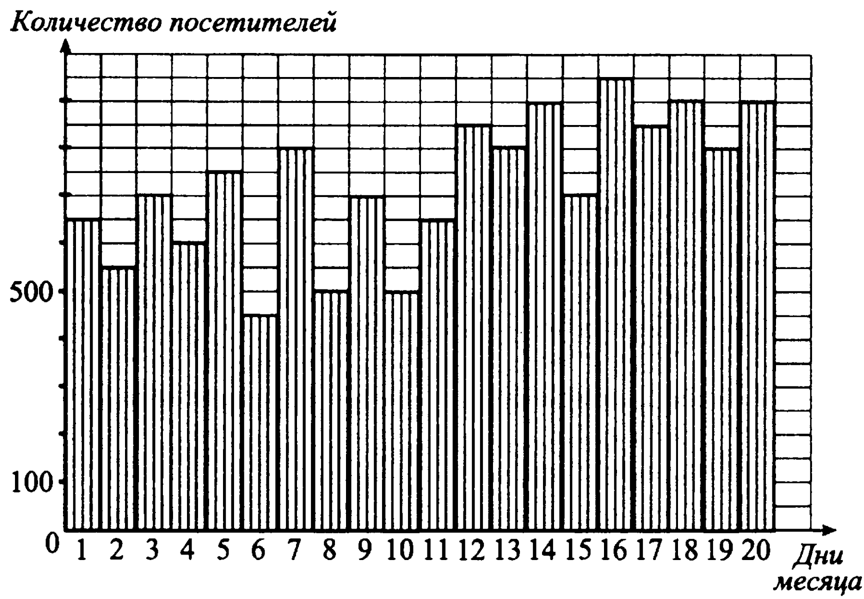


Рис. 87.

В4. Своему постоянному клиенту компания сотовой связи решила предоставить на выбор одну из скидок. Либо скидку 20% на звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе, либо скидку 10% на звонки в другие регионы, либо 30% на услуги мобильного интернета.

Клиент посмотрел распечатку расходов за прошлый месяц и выяснил, что он потратил 190 рублей на звонки абонентам других компаний в своём регионе, 160 рублей на звонки в другие регионы и 120 рублей на мобильный интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же (без учёта скидки) и, исходя из этого, выбирает наиболее выгодную для себя скидку. Какую скидку следует выбрать? В ответе запишите, сколько рублей составит эта скидка, если клиент будет пользоваться всеми услугами в том же объёме.

B5. Найдите площадь прямоугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (см. рис. 88). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

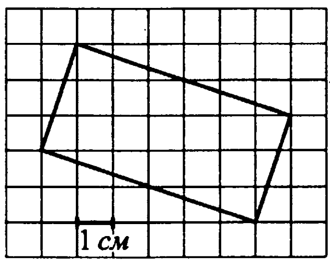


Рис. 88.

B6. Перед началом первого тура чемпионата по фехтованию участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате соревнуются 36 спортсменов, среди которых 8 участников из России, в том числе Василий Петров. Найдите вероятность того, что в первом туре Василий Петров будет фехтовать с каким-либо спортсменом из России.

B7. Найдите корень уравнения $\log_4(x+4)^2 = \log_4(5x+20)$.

B8. Основания равнобедренной трапеции равны 5 и 15, а её периметр равен 46 (см. рис. 89). Найдите площадь трапеции.

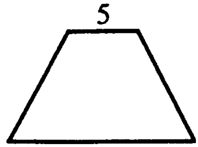


Рис. 89.

B9. На рисунке 90 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-5; 3]$.

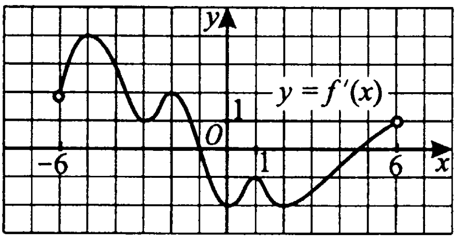


Рис. 90.

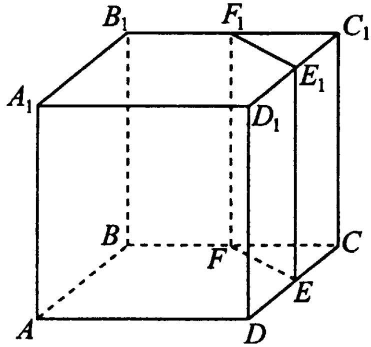


Рис. 91.

B10. Объём куба равен 180. Найдите объём треугольной призмы, отсекаемой от него плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины (см. рис. 91).

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $5\sin\frac{11\pi}{12}\cos\frac{11\pi}{12}$.

B12. При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 500$ нм на дифракционную решётку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решётке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d\sin\varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать третий максимум на решётке с периодом, не превосходящим 3000 нм?

B13. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AD = 8$, $BB_1 = 15$, $CD = 17$. Найдите угол CA_1D. Ответ дайте в градусах.

B14. Электропоезд-экспресс, двигаясь равномерно со скоростью 180 км/ч, проезжает мимо семафора за 4 с. Найдите длину экспресса (в метрах).

B15. Найдите точку максимума функции $y = (4x^2 - 24x + 24)e^{x-24}$.

При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

С1. а) Решите уравнение $9\operatorname{tg}^4 x = 6\operatorname{tg}^2 x - 1$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

С2. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник, основание BC которого равно 3. Площадь боковой поверхности призмы равна 32. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через B_1C параллельно высоте основания AD, если расстояние от точки A до плоскости сечения равно $\frac{6}{5}$.

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{x^2} \dfrac{4x-5}{|x-2|} \geqslant \dfrac{1}{2}, \\ 8 \cdot \dfrac{3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x. \end{cases}$$

С4. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, BC и AD — основания трапеции.

а) Докажите, что $\frac{S_{ABO}}{S_{AOD}} = \frac{BC}{AD}$.

б) Найдите площадь трапеции, если $AD = 4BC$, $S_{AOB} = 2$.

С5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{a - 2xy} = y - x + 5$ имеет единственное решение.

С6. Существует ли натуральное число, меньшее 100 000, которое делится на n и сумма цифр которого равна k в каждом из следующих случаев:

а) $n = 2014$, $k = 45$;

б) $n = 2014$, $k = 14$.

в) Верно ли, что для каждого натурального числа k, где $17 \leqslant k \leqslant 41$, существует натуральное число, меньшее 100 000, которое делится на 2014?

Вариант № 16

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

В1. Геннадий купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 76 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

B2. Среди 50 000 жителей 40% не интересуются футболом. Среди футбольных болельщиков 70% смотрели по телевизору финал Лиги чемпионов. Сколько жителей города смотрели этот матч по телевизору?

B3. На диаграмме (см. рис. 92) показана среднесуточная температура воздуха за период с 1.03 по 24.03 в некотором городе. По горизонтали отмечаются дни месяца, по вертикали — температура воздуха.

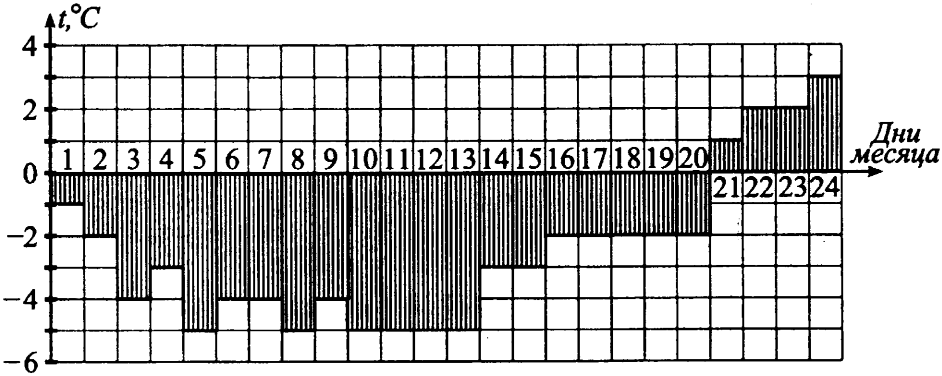


Рис. 92.

Определите количество дней в указанном периоде, когда средняя температура воздуха была ниже $-4°C$.

B4. В таблице указаны цены в рублях на некоторые блюда в трёх различных кафе («Счастье», «Завтра» и «Лето»).

Наименование блюда	«Счастье»	«Завтра»	«Лето»
Суп харчо	180	160	210
Пюре с котлетой	180	190	200
Отбивная с рисом	220	210	200
Сок яблочный, 1 стакан	50	30	70
Сэндвич	70	90	80
Пирожное «Чудо в креме»	38	55	90

Определите, в каком из этих кафе окажется самым дешёвым следующий заказ: 2 порции супа харчо, 1 порция пюре с котлетой, 4 стакана яблочного сока и 3 пирожных «Чудо в креме». В ответе напишите стоимость данного набора (в рублях).

B5. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на рисунке 93, вершины которого имеют координаты (4; 0), (0; 6), (7; 2), (3; 8).

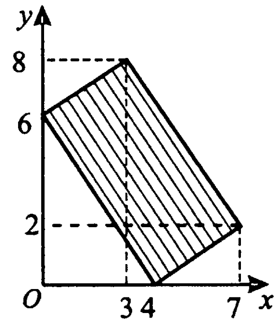


Рис. 93.

B6. Вероятность того, что новая стиральная машина в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,051. В некотором городе из 1000 проданных стиральных машин в течение года в гарантийную мастерскую поступили 53 штуки. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

B7. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{3}}(5-2x) = -3$.

B8. Найдите тангенс угла CDA (см. рис. 94).

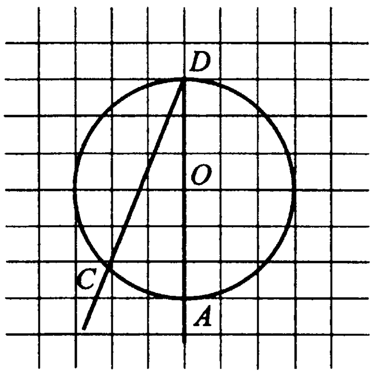


Рис. 94.

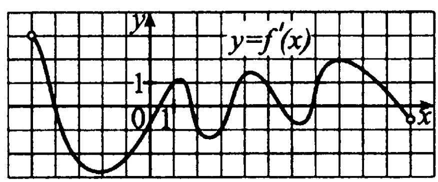


Рис. 95.

B9. На рисунке 95 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 11)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-3; 10]$.

B10. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 45 см (см. рис. 96). На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 3 раза меньше первого? Ответ выразите в сантиметрах.

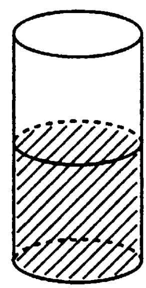


Рис. 96.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $\dfrac{15(\sin^2 9^\circ - \cos^2 9^\circ)}{\cos 18^\circ}$.

B12. Коэффициент полезного действия (КПД) кормозапарника равен отношению количества теплоты, затраченного на нагревание воды массой $m_в$ (в килограммах) от температуры t_1 до температуры t_2 (в градусах Цельсия), к количеству теплоты, полученному от сжигания дров массой $m_{др}$ кг. Он определяется формулой $\eta = \dfrac{c_в m_в (t_2 - t_1)}{q_{др} \cdot m_{др}} \cdot 100\%$, где $c_в = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг$\cdot$ К) — теплоёмкость воды, $q_{др} = 8{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг — теплота сгорания дров.

Определите наименьшее количество дров (в кг), которое понадобится сжечь в кормозапарнике, чтобы нагреть $m_в = 80$ кг воды от $58{,}5^\circ C$ до кипения, если известно, что КПД кормозапарника не больше 42%. Ответ выразите в килограммах.

B13. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ стороны оснований равны 1, боковые рёбра равны 3. Найдите угол CE_1E. Ответ дайте в градусах.

B14. Клиент А. сделал вклад в банке в размере 8800 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Ещё ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 968 рублей больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

B15. Найдите наибольшее значение функции $y = 4^{-5-4x-x^2}$.

При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $8\sin^2 x(3 - 2\sin^2 x) - 9 = 0$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

C2. На ребре AB прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P так, что $AP : PB = 3 : 1$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью PCA_1, если $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 1$.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{x^2}}(x^7+x^3-3) < -\frac{7}{2}, \\ 3^{0{,}01x^2-0{,}6x-2{,}5} \leqslant 81\sqrt{3}. \end{cases}$$

C4. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, BC и AD — основания трапеции.

а) Докажите, что $\frac{S_{ABO}}{S_{BOC}} = \frac{AD}{BC}$.

б) Найдите площадь трапеции, если $AD = 5$, $BC = 1$, $S_{ABO} = 5$.

C5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{a-2xy} = -y + x + 9$ имеет единственное решение.

C6. Существует ли натуральное число, меньшее 100 000, которое делится на n и сумма цифр которого равна k в каждом из следующих случаев:

а) $n = 100$, $k = 28$;

б) $n = 2014$, $k = 25$.

в) Верно ли, что для каждого натурального числа k, где $2 \leqslant k \leqslant 16$, существует натуральное число, меньшее 100 000, которое делится на 2014?

Вариант № 17

Часть 1

Ответом на задания B1–B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. Для приготовления маринада на 1 литр воды требуется 14 г лимонной кислоты. Лимонная кислота продаётся в пакетиках по 10 г. Какое наименьшее число пачек нужно купить хозяйке для приготовления 7 литров маринада?

B2. У хозяйки в сумке персики и яблоки, всего 25 штук. Найдите количество яблок, если персики составляют 16% от общего числа фруктов.

B3. На диаграмме (см. рис. 97) показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Челябинске. Найдите количество месяцев со среднемесячной температурой выше 10 °C.

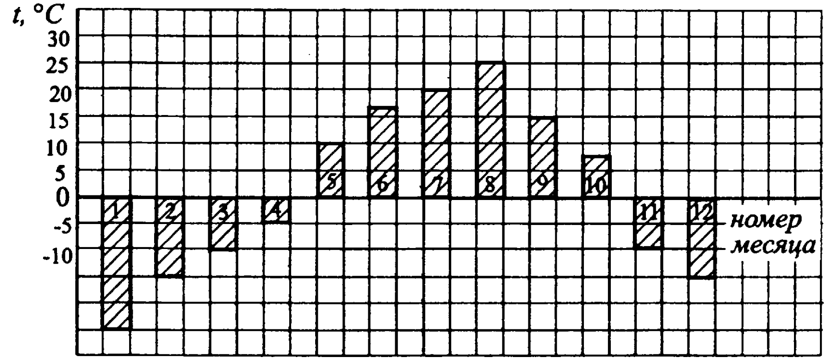


Рис. 97.

B4. Александру надо купить 2 дивана и 6 табуреток в одном из трёх магазинов. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Название магазина	**Цена дивана (в руб.)**	**Цена табуретки (в руб.)**	**Стоимость доставки (в руб.)**	**Дополнительные условия**
«Королевство»	19 200	600	1020	
«Стиль»	18 500	920	1300	При заказе на сумму свыше 40 000 рублей (с учётом доставки) — скидка 5%
«Избушка»	18 010	800	900	При заказе на сумму свыше 45 000 рублей (без доставки) доставка бесплатно

B5. Найдите площадь фигуры, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 98). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

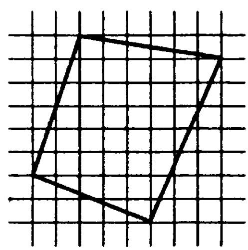


Рис. 98.

B6. При прослушивании певцов для участия в конкурсе «Вокал. Дети» в городе N порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что Коля Д. будет выступать после Оли М. и после Даши В.? Результат округлите до сотых.

B7. Найдите корень уравнения $\log_7(5-x)=\log_7(2-x)+1$.

B8. В треугольнике ABC угол A равен 44°, угол B равен 72°, AD, BE, CF — высоты, пересекающиеся в точке O. Найдите угол COE (см. рис. 99). Ответ дайте в градусах.

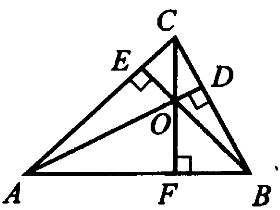


Рис. 99.

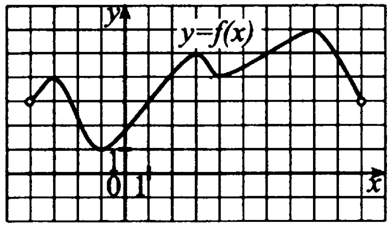


Рис. 100.

B9. На рисунке 100 изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-4; 10)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

B10. Сосуд в форме шестиугольной призмы наполнен жидкостью до отметки 24 см. Найдите, на какой высоте будет уровень этой же жидкости, если её перелить в другой сосуд такой же формы, но со стороной основания вдвое меньшей, чем сторона первого сосуда. Ответ дайте в сантиметрах.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $\dfrac{9^{\log_5 175}}{9^{\log_5 7}}$.

B12. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h=5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 1,6 с. На сколько метров должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,4 с?

B13. Найдите угол N_1CB многогранника, изображённого на рисунке 101. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.

B14. Бизнесмен Яблоков получил в 2009 году прибыль в размере 100000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 150% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Яблоков за 2012 год?

B15. Найдите точку минимума функции $y=17^{x^2+6x-8}$.

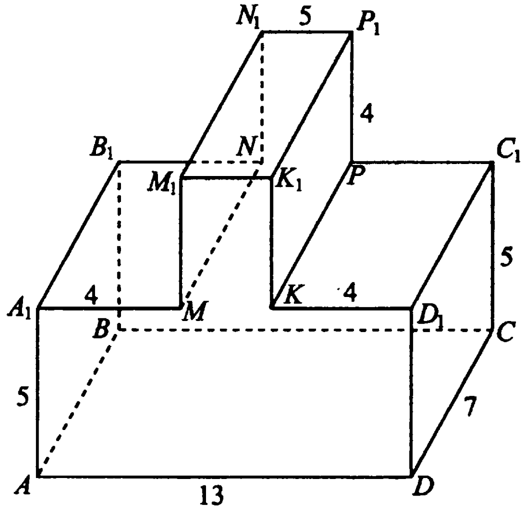


Рис. 101.

При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $\log_{\sin x} \cos 2x = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\frac{11\pi}{4}; 3\pi\right)$.

C2. В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ с вершиной P стороны основания равны 8, а высота равна 14. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, BC и PD.

C3. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_x (x+2) - \log_{x+2} x^2 \geqslant 1, \\ 6^x + 24 > 3^{x+1} + 2^{x+3}. \end{cases}$

C4. В прямоугольную трапецию вписаны две окружности радиусами 1 и 4, каждая из которых касается боковых сторон трапеции, одного из её оснований и другой окружности. Найдите: а) высоту трапеции; б) площадь трапеции.

C5. Найдите все значения a, при которых уравнение $|x^2 - 6x + 5| = ax - 1$ имеет ровно 3 корня.

C6. Среди четырёхзначных чисел найдите количество чисел, содержащих в своей десятичной записи:

а) ровно одну цифру 1;

б) ровно две цифры 1;

в) хотя бы одну цифру 1.

Вариант № 18

Часть 1

Ответом на задания B1–B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. Спидометр автомобиля показывает скорость в милях в час. Какую скорость (в милях в час) показывает спидометр, если автомобиль движется со скоростью 84 км в час? (Считайте, что 1 миля равна 1,6 км.)

B2. Цена ноутбука с 15%-ной скидкой — 25 500 рублей. Найдите цену ноутбука без скидки (в рублях).

B3. На диаграмме (см. рис. 102) показаны результаты выполнения заданий C1–C6 с развёрнутым ответом участниками ЕГЭ в Российской Федерации. По горизонтали указаны номера заданий, по вертикали — процент выполнения заданий C1 – C6 участниками ЕГЭ. Определите по диаграмме количество заданий со средним процентом выполнения более 10.

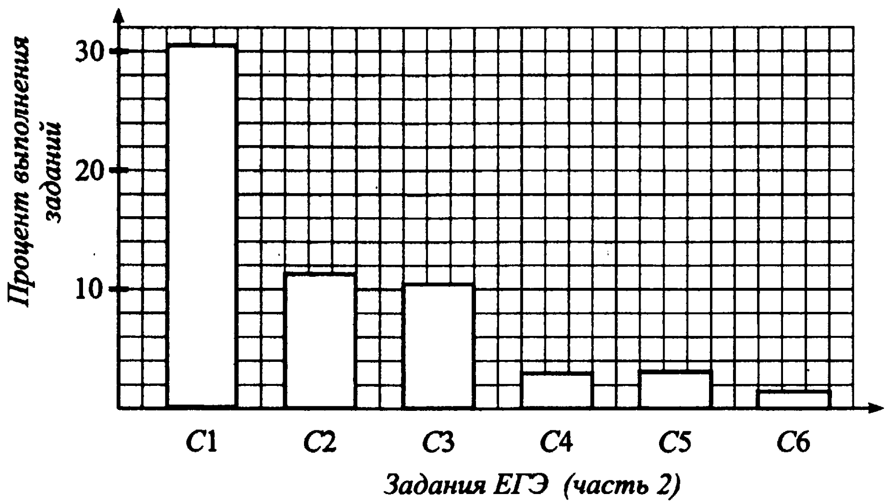


Рис. 102.

B4. Для того чтобы построить забор, фирме надо приобрести 2 тонны кирпича. Один кирпич весит 4 кг. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ (см. таблицу на с. 134)?

Фирма	Цена за 1 кирпич (руб.)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
«Строитель»	17,5	1000	При покупке на сумму более 10 000 руб. доставка бесплатно
«Атлант»	16	1500	При покупке свыше 400 кирпичей доставка со скидкой 50%
«Титан»	15,5	1200	

B5. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 103). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

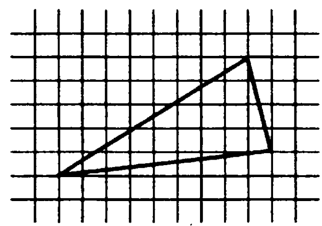


Рис. 103.

B6. На рисунке 104 изображён лабиринт. Жук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и поползти назад жук не может, поэтому на каждом разветвлении жук выбирает один из путей, по которому ещё не шёл. Считая выбор дальнейшего пути чисто случайным, определите, с какой вероятностью он пройдёт к пункту D.

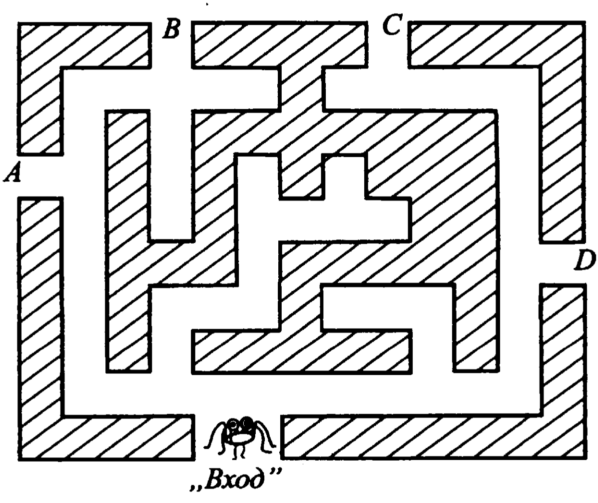


Рис. 104.

B7. Найдите корень уравнения $\log_5(9x-7) = \frac{1}{2}\log_5 4$.

B8. Найдите синус угла BAC (см. рис. 105). В ответе укажите значение синуса, умноженного на $5\sqrt{10}$.

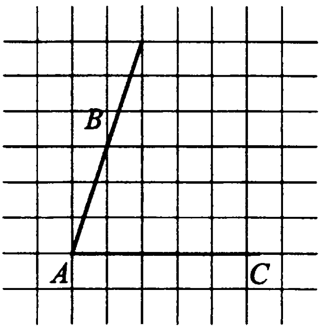


Рис. 105.

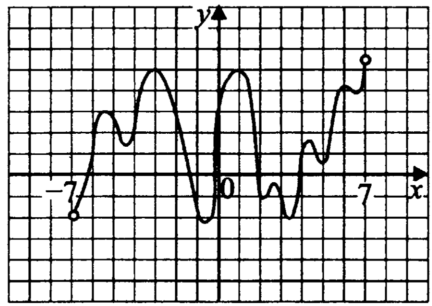


Рис. 106.

B9. На рисунке 106 изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-1; 4]$.

B10. Сосуд в виде цилиндра наполнен жидкостью, уровень которой 18 см. Найдите, на какой высоте будет находиться уровень этой же жидкости, если её перелить в другой цилиндрический сосуд, радиус основания которого в 2 раза больше радиуса первого? Ответ выразите в сантиметрах.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $\log_{16}\log_7 49$.

B12. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле $F_A = \rho g l^3$, где l — длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, а $g = 9{,}8$ Н/кг — ускорение свободного падения. Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем 33 075 Н? Ответ выразите в метрах.

B13. Найдите расстояние между точками A и D_1 многогранника, изображённого на рисунке 107. Все двугранные углы многогранника прямые.

B14. Галя и Люда выполняют работу по параллельному набору одного и того же текста. За один час Галя набирает 12 страниц текста, а Люда — 15. Они начали работать одновременно, и Галя закончила работу на 45 минут позже Люды. Найдите, сколько страниц содержала работа.

B15. Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 3x + \ln x + 5$ на отрезке $\left[\frac{8}{9}; \frac{10}{9}\right]$.

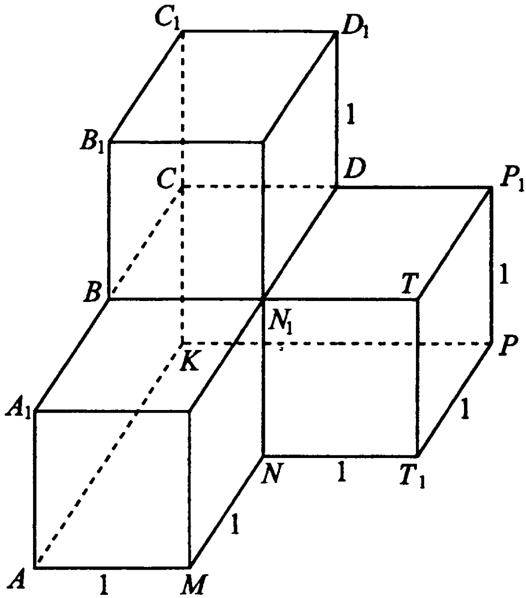


Рис. 107.

При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $\log_{\cos x} \sin 2x = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right)$.

C2. В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ с вершиной P стороны основания равны 16, а высота равна 14. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, BC и PC.

C3. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_x (x+6) - \log_{x+6} x^2 \geqslant 1, \\ 2^x \log_2 x + 2 \geqslant 2^{x-1} + \log_2 x^4. \end{cases}$

C4. В равнобедренную трапецию вписаны две окружности радиусами 4 и 9, каждая из которых касается боковых сторон трапеции, одного из её оснований и другой окружности. Найдите: а) произведение длин её оснований; б) площадь трапеции.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^2(x^2-8)+16} = ax + 3a - 1$ имеет ровно четыре корня.

C6. Среди четырёхзначных чисел найдите количество чисел, содержащих в своей десятичной записи:

а) ровно одну цифру 0;

б) ровно две цифры 0;

в) хотя бы одну цифру 0.

Вариант № 19

Часть 1

Ответом на задания B1–B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B1. Для приготовления компота собрали 4 кг малины и разложили малину по банкам. Вместимость каждой банки — 0,6 кг малины. Какое наименьшее количество банок надо взять, чтобы разместить всю малину?

B2. Одного рулона обоев хватает для оклейки полосы от пола до потолка шириной 1,8 м. Сколько рулонов обоев нужно купить для оклейки прямоугольной внутренней залы дворца размерами 5,6 м на 8,8 м?

B3. Посев семян подсолнечника рекомендуется проводить в конце апреля при дневной температуре воздуха не менее $8\,°C$. На рисунке 108 показан прогноз дневной температуры воздуха на третью декаду апреля. Определите, в течение скольких дней за период с 20 апреля по 30 апреля можно проводить посев подсолнечника.

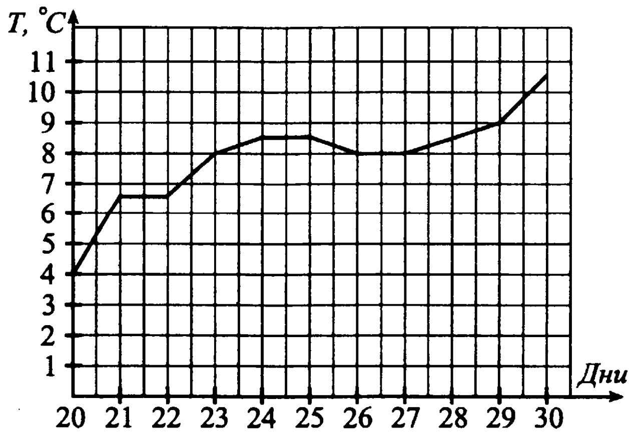


Рис. 108.

B4. Семья из трёх человек планирует поехать из Волгограда в Москву. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 1320 рублей. Автомобиль расходует 8 л бензина на 100 км, расстояние по шоссе равно 900 км, а цена бензина — 29,5 рублей за литр. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку на троих?

B5. Найдите площадь фигуры, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 109). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

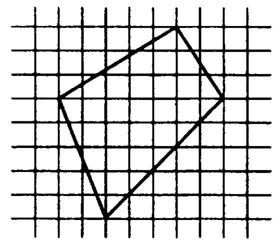


Рис. 109.

B6. В службе по предоставлению справочно-информационных и сервисных услуг компании три оператора. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,2. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все операторы заняты одновременно (считайте, что абоненты звонят независимо друг от друга).

B7. Найдите корень уравнения $\sqrt{5x+74}=8$.

B8. В прямоугольном треугольнике ABC внешний угол при вершине B равен 112°, $\angle C$ — острый (см. рис. 110). Медиана AO пересекает сторону BC в точке O. Найдите угол AOC. Ответ выразите в градусах.

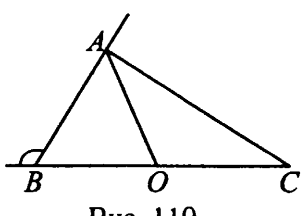


Рис. 110.

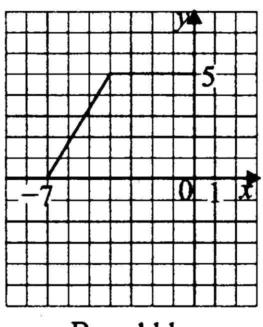


Рис. 111.

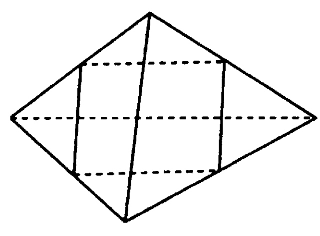


Рис. 112.

B9. На рисунке 111 изображён график функции $y=f(x)$ (два луча с общей точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(-3)-F(-7)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

B10. Сечение площадью 2,25 проходит через середины четырёх рёбер правильного тетраэдра (см. рис. 112). Найдите площадь S полной поверхности тетраэдра. В ответе укажите $2\sqrt{3}S$.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $-20\sin(\pi+\beta)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)$, если $\sin\beta = -\frac{1}{2}$.

B12. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние (в метрах), которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$, где $v_0 = 12$ м/с — начальная скорость мячика, а $g = 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения. При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 7,2 м?

B13. Найдите тангенс угла NDC_1 многогранника, изображённого на рисунке 113. Все двугранные углы многогранника прямые.

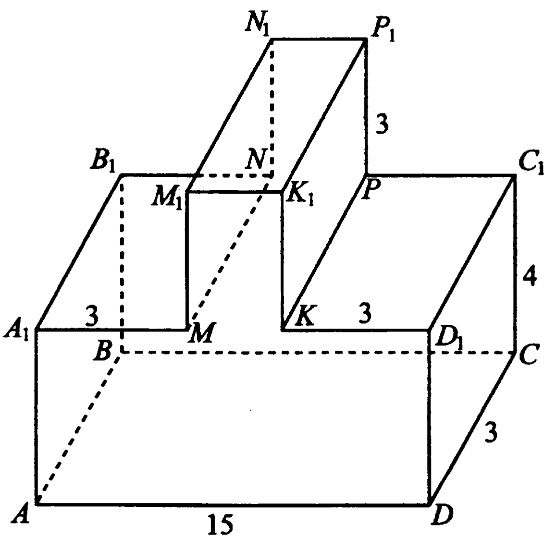


Рис. 113.

B14. Курага получается в процессе сушки абрикосов. Сколько килограммов абрикосов потребуется для получения 20 килограммов кураги, если абрикосы содержат 80% воды, а курага содержит 12% воды?

B15. Найдите точку максимума функции $y = 8 - x + \ln(x+4)$.

При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

С1. а) Решить уравнение $\log_5(7+2\cos 4x) = \sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[3\pi; 4{,}5\pi)$.

С2. В прямую правильную восьмиугольную призму вписано два шара радиуса 5, стоящие один на другом и касающиеся как друг друга, так и всех боковых граней. Нижний шар касается грани нижнего основания, верхний касается грани верхнего основания. Найдите площадь сечения, проходящего через ребро нижнего основания и точку касания верхнего шара с противоположной боковой гранью.

С3. Решите неравенство $\left||3^x+4x-9|-8\right| \leqslant 3^x-4x-1$.

С4. В остроугольный треугольник площадью S вписан другой треугольник с периметром 6 и площадью s, вершинами которого являются основания высот исходного треугольника. Отношение радиусов окружностей, описанной около исходного треугольника и вписанной в построенный треугольник, $\frac{R}{r}=3$. Найдите отношение площадей этих треугольников $\frac{S}{s}$.

С5. При каких значениях параметра a уравнение $(x^2+4x-3)^{18}+(x^2+4x-3)^{26}=(x+a)^{18}+(x+a)^{26}$ имеет ровно 3 корня?

С6. При каких значениях параметра a все корни квадратного уравнения $x^2-(a+2)x+2a+7=0$ целые?

Вариант №20

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

В1. Олег отправил MMS-сообщения с вечеринки своим 8 друзьям. Стоимость одного MMS-сообщения 6 рублей 50 копеек. Перед отправкой сообщений на счету у Олега было 320 рублей. Сколько рублей осталось у Олега после отправки всех сообщений?

В2. После снижения цены на сплит-систему на 13% её стоимость стала 9048 рублей. Найдите прежнюю цену сплит-системы.

В3. На рисунке 114 показано изменение цены акций некоторой компании за период с 18.01.2010 по 20.02.2010. По горизонтали отмечены дни, по вертикали — цена акций (в рублях) этой компании за указанный период. Найдите разность (в рублях) между наибольшей и наименьшей ценами акций за указанный период.

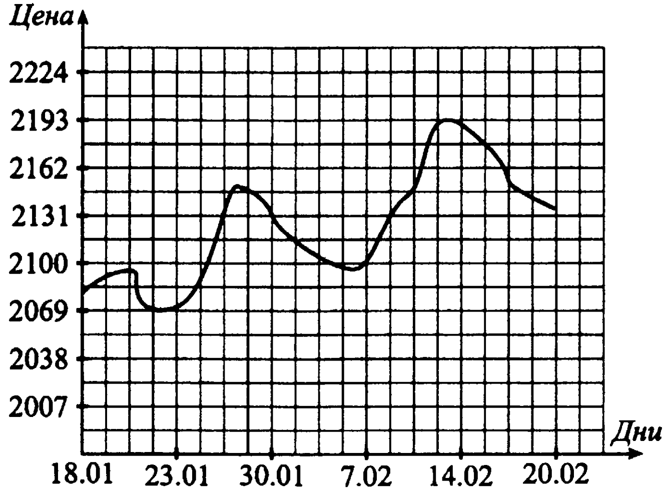


Рис. 114.

В4. Керамическая плитка одной и той же торговой марки выпускается трёх разных размеров. Плитки упакованы в пачки. Пользуясь данными таблицы, определите, в каком случае цена одного квадратного метра плитки будет наименьшей. В ответе запишите найденную наименьшую цену квадратного метра в рублях.

Размер (см×см)	Количество плиток в пачке	Цена пачки
25 × 25	10	1780 р.
10 × 10	50	595 р.
10 × 20	20	594 р.

В5. Острые углы прямоугольного треугольника равны 34° и 56°. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла (см. рис. 115). Ответ дайте в градусах.

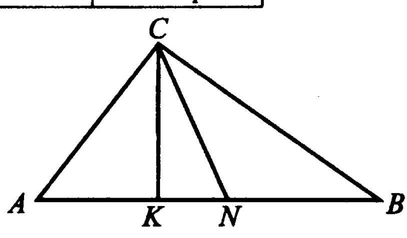


Рис. 115.

B6. Охотник дядя Женя попадает в моль на ковре с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного ружья. Если дядя Женя стреляет из непристрелянного ружья, то он попадает с вероятностью 0,2. На столе лежат 10 ружей, из них 4 пристрелянные. Дядя Женя видит на ковре моль, наудачу хватает первое попавшееся ружьё и стреляет в неё. Найдите вероятность того, что он промахнётся.

B7. Найдите корень уравнения $\sqrt{66-5x}=-x$.

B8. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC $\angle B=36°$, биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O (см. рис. 116). Найдите угол EOA. Ответ дайте в градусах.

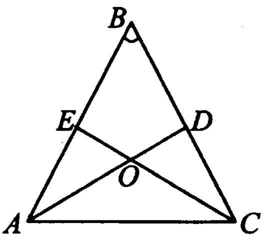


Рис. 116.

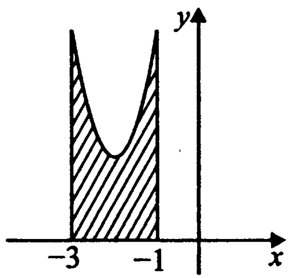


Рис. 117.

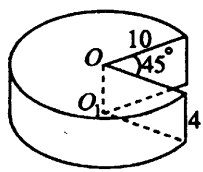


Рис. 118.

B9. На рисунке 117 изображён график некоторой функции $y=f(x)$. Функция $F(x)=3x^3+12x^2+20x-\dfrac{18}{5}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

B10. Найдите объём V части цилиндра, изображённого на рисунке 118. В ответе укажите $\dfrac{V}{\pi}$.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

B11. Найдите значение выражения $\dfrac{f(x+2)}{f(x-2)}$, если $f(x)=5^x$.

B12. Два тела массой $m=3$ кг каждое движутся с одинаковой скоростью $v=30$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, определяется выражением $Q=mv^2\sin^2\alpha$. Под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 675 джоулей?

B13. Найдите угол BMC_1 многогранника, изображённого на рисунке 119. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.

B14. Четыре пары одинаковых босоножек дешевле пары сапог на 6%. На сколько процентов 6 пар таких же босоножек дороже пары сапог?

B15. Найдите наименьшее значение функции $y = 3 + 24x - 2x^2 - 20\ln x$ на отрезке $\left[\frac{1}{7}; \frac{13}{7}\right]$.

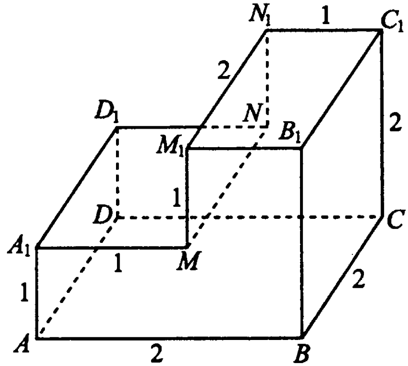


Рис. 119.

При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение $\log_7(10 - 3\cos 8x) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

б) Найдите его корни, принадлежащие промежутку $\left(\frac{15\pi}{2}; 9\pi\right]$.

C2. В прямую правильную шестиугольную призму вписано два шара радиуса 3, стоящие один на другом и касающиеся как друг друга, так и всех боковых граней. Нижний шар касается грани нижнего основания, верхний касается грани верхнего основания. Найдите площадь сечения, проходящего через ребро нижнего основания и точку касания верхнего шара с противоположной боковой гранью.

C3. Решите неравенство $\left||2^x + 4x - 9| - 8\right| \leqslant 2^x - 4x - 1$.

C4. В остроугольный треугольник вписан другой треугольник с периметром 6 единиц, вершинами которого являются основания высот исходного треугольника. Отношение площадей этих треугольников $\frac{S}{s} = 6$. Найдите отношение радиусов окружностей, описанной около исходного треугольника и вписанной в построенный треугольник, $\frac{R}{r}$.

C5. При каких значениях параметра a уравнение
$(x^2 - 4x + 3)^{22} + (x^2 - 4x + 3)^{46} = (x + a)^{22} + (x + a)^{46}$ имеет ровно три корня?

C6. При каких значениях параметра a все корни квадратного уравнения $x^2 - (a + 3)x + 3a + 11 = 0$ целые?

Глава II. Сборник задач для подготовки к ЕГЭ

Базовый уровень (часть B)

§ 1. Алгебра и начала анализа

1.1. Выражения и преобразования

1.1.1. Степень с рациональным показателем

1. Найдите значение выражения $5^9 \cdot 6^{12} : 30^9$.

2. Упростите выражение $\dfrac{b^{4,44}}{b^{3,11} \cdot b^{3,33}}$ и найдите его значение при $b = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$.

Найдите значение выражения (3—4):

3. $3^4 \cdot 7^5 : 21^4$.

4. $\dfrac{(3a^2)^3 \cdot (4b)^2}{(12a^3b)^2}$.

1.1.2. Степени и корни

5. Найдите значение выражения $\sqrt{2a - \sqrt{a^2+2}} \cdot \sqrt{2a + \sqrt{a^2+2}}$ при $a = 1$.

Вычислите (6—7):

6. $\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}+\sqrt{6}} + \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{14}-\sqrt{6}}$.

7. $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{65}-\sqrt{45}} + \dfrac{\sqrt{65}}{\sqrt{65}+\sqrt{45}}$.

Вычислите значение выражения (8—11):

8. $2^{3-\sqrt{2}} \cdot 2^{3+\sqrt{2}} - 100$.

9. $3^{2+\sqrt{3}} \cdot 3^{2-\sqrt{3}} + 3^2$.

10. $3 \cdot \sqrt[3]{216} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$.

11. $\frac{20}{\sqrt[5]{1024}} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2$.

Найдите значение выражения (12–16):

12. $\frac{(\sqrt[11]{5 \cdot a^7})^{33}}{a^{21}}$, если $a \neq 0$.

13. $\frac{\sqrt{81 \sqrt[11]{m}}}{\sqrt[11]{2048\sqrt{m}}}$ при $m > 0$.

14. $2x - 7 + \sqrt{4x^2 - 20x + 25}$, если $x = 2,5$.

15. $\sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{(2a-15)^2}$, если $3 < a < 7,5$.

16. $\frac{18 \sqrt[65]{\sqrt[33]{a}} - 11 \sqrt[15]{\sqrt[143]{a}}}{14 \sqrt[39]{\sqrt[55]{a}}}$ при $a \neq 0$.

Найдите значение выражения (17–22):

17. $\frac{3 - 7\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{x}$ при $x > 0$.

18. $\left(\sqrt{3\frac{5}{17}} - \sqrt{7\frac{7}{17}}\right) : \sqrt{\frac{7}{34}}$.

19. $\frac{25 \sqrt[10]{2m}}{\sqrt[30]{2m} \cdot \sqrt[15]{2m}}$ при $m > 0$.

20. $\sqrt{t^2 - 16t + 64} + t$ при $t \leqslant 8$.

21. $\sqrt{(b-12)^2} + \sqrt{(b-7)^2}$ при $7 \leqslant b \leqslant 12$.

22. $\frac{\sqrt[4]{b^3} \cdot (\sqrt{7}b)^2}{b^{2,75}}$ при $b > 0$.

1.1.3. Логарифмические и показательные выражения

Вычислите (23–24):

23. $\dfrac{\log_7 21}{\log_{21} 7} - \dfrac{\log_7 147}{\log_3 7}$.

24. $\log_2^2 3 + \dfrac{\log_2 12}{\log_{12} 2} - \dfrac{\log_2 144}{\log_3 2}$.

Найдите значение выражения (25–28):

25. $(3\log_{27} 3{,}5 - \log_3 10{,}5 - 1)5^{3\log_5 2}$.

26. $5\log_3 49 \cdot \log_7 81 + 17^{\log_{17} 8}$.

27. $\log_3 5 \cdot \log_2 7 \cdot \log_5 8 \cdot \log_7 9$.

28. $\log_{36} 5 \cdot \log_8 3 \cdot \log_{25} 2 \cdot \log_{\sqrt[3]{3}} 6$.

Вычислите (29–31):

29. $\log_{10} 2 \cdot \log_5 10 \cdot \log_2 5$.

30. $98 \cdot 7^{\log_7 \frac{1}{49}}$.

31. $256 \cdot 4^{\log_4 \frac{1}{64}}$.

Вычислите значение выражения (32–33):

32. $11 - 3\log_3 \sqrt{3}$.

33. $13 - 3\log_2 \sqrt{8}$.

Найдите значение выражения (34–61):

34. $49^{\log_7 4}$.

35. $4^{2+\log_4 7}$.

36. $5^{2+\log_5 12}$.

37. $5^{2+\log_5 4}$.

38. $2^{\log_2 7+3}$.

39. $8^{\log_2 5}$.

40. $9^{\frac{\ln 6}{\ln 3}}$.

41. $\dfrac{\log_7 \sqrt[5]{35}}{\log_7 35}$.

42. $\dfrac{\ln 42}{\ln \sqrt[3]{42}}$.

43. $\log_4 5 \cdot \log_5 64$.

44. $\log_{625} 7 \cdot \log_7 5$.

45. $102 \cdot \log_5 \sqrt[6]{5}$.

46. $108 \cdot \log_{11} \sqrt[8]{11}$.

47. $\log_{81} \log_7 343$.

48. $5 \cdot 4^{\log_2 3+1}$.

49. $7^{3\log_7 4}$.

50. $144^{\log_{12} 14}$.

51. $\log_4 25{,}6 + \log_4 10$.

52. $3^{4+\log_3 6}$.

53. $2^{2+\log_4 121}$.

54. $\log_3 81 + \log_3 \frac{1}{9}$.

55. $\log_4 8 + \log_9 81$.

56. $\frac{42}{5^{\log_5 7}}$.

57. $\log_5 12{,}5 + \log_5 10$.

58. $(1 - \log_9 45) \cdot (1 - \log_5 45)$.

59. $\log_{0,2} 7 \cdot \log_7 0{,}04$.

60. $\log_{0,7} 10 - \log_{0,7} 7$.

61. $\log_{13} 0{,}25 + \frac{\log_3 4}{\log_3 13}$.

1.1.4. Тригонометрические выражения

Вычислите (62–67):

62. $\frac{\cos 71^\circ \cdot \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \cdot \cos 19^\circ}{2\cos 69^\circ \cdot \cos 8^\circ + 2\cos 82^\circ \cdot \cos 21^\circ}$.

63. $\frac{3(\sin 10^\circ + \sin 80^\circ)(\cos 80^\circ - \cos 10^\circ)}{2 \cdot \sin 70^\circ}$.

64. $\sin 30^\circ(\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \cos 12^\circ \sin 18^\circ)$.

65. $\cos 60^\circ(\cos 25^\circ \cos 35^\circ - \sin 25^\circ \sin 35^\circ)$.

66. $\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$.

67. $\frac{\cos 70^\circ \cdot \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \cdot \cos 20^\circ}{\cos 68^\circ \cdot \cos 8^\circ + \cos 82^\circ \cdot \cos 22^\circ}$.

Найдите значение выражения (68–77):

68. $\frac{8\sin 36^\circ \cdot (\cos 36^\circ - \sin 18^\circ)}{\cos 54^\circ}$.

69. $\frac{\sqrt{3}}{\sin 40^\circ} + \frac{1}{\cos 40^\circ}$.

70. $\cos 15^\circ \cos 45^\circ - \cos 45^\circ \cos 75^\circ$.

71. $\frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos 75^\circ \cos 15^\circ - \cos 15^\circ \cos 105^\circ}{\sin 18^\circ \sin 63^\circ + \sin 108^\circ \sin 27^\circ}$.

72. $\mathrm{tg}(\alpha + 7\pi) - \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}6$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

73. $5\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+2\cos(\alpha+3\pi)$, если $\cos\alpha=\frac{1}{4}$.

74. $2\,\mathrm{tg}(\alpha-5\pi)+\mathrm{ctg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$, если $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ и $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$.

75. $2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+3\sin^2(\alpha-\pi)$, если $\sin\alpha=0{,}5$.

76. $\sin(2\alpha)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)+\cos^2(\alpha+\pi)$, если $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

77. $\frac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\sin 2x}$ при $x=\frac{3\pi}{8}$.

Вычислите значение выражения (78–84):

78. $1-(\cos 45^\circ\cdot\cos 15^\circ-\sin 15^\circ\cdot\sin 45^\circ)^2$.

79. $(\sin 75^\circ\cdot\cos 15^\circ-\sin 15^\circ\cdot\cos 75^\circ)^2+0{,}5$.

80. $\frac{\sqrt{2}(\sin 70^\circ+\sin 20^\circ)}{\cos 25^\circ}$.

81. $\frac{\cos 50^\circ+\cos 40^\circ}{\sqrt{2}\cos 5^\circ}$.

82. $\sin^2 t+\cos^2 t-3\sin\pi+7\cos\pi$.

83. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+4$.

84. $2\left(3-\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\right)$.

85. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

Найдите значение выражения (86–87):

86. $8\sqrt{6}\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{3}$.

87. $\frac{6\sin 37^\circ\cdot\sin 53^\circ}{\sin 74^\circ}$.

88. Найдите $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\frac{17\cos\alpha+3\sin\alpha}{6\sin\alpha-32\cos\alpha}=2$.

89. Найдите значение выражения $-16\sin(\pi+\beta)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)$, если $\sin\beta=-\frac{1}{2}$.

90. Найдите $\operatorname{ctg}^2 \alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{-1}{2\sqrt{5}}$.

91. Найдите значение выражения $\dfrac{2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$.

1.1.5. Комбинированные выражения

Найдите значение выражения (92–93):

92. $\sqrt{0{,}04}+\log_4 2\sqrt{2}+2^{\log_2 3}$.

93. $3^{\log_3 2}-\sqrt{0{,}09}+3\log_9 \dfrac{1}{3\sqrt[3]{3}}$.

1.2. Уравнения. Системы уравнений

1.2.1. Логарифмические и показательные уравнения

Решите уравнение (94–100):

94. $5^{3x-1}\cdot 25^{7-5x}=0{,}2$.

95. $8^{2x+3}-4^{3x+2}=62$.

96. $725-4\cdot 5^x=5^{x+2}$.

97. $4^{x-2}+2\cdot 4^{x-1}=9$.

98. $9^x=8\cdot 3^{x+1}+81$.

99. $2^{2x+1}+2^{2x+2}+2^{2x+3}+2^{2x+4}=240$.

100. $\log_4\log_2\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$.

Найдите корень уравнения (101–106):

101. $\log_3(x+5)=3$.

102. $2-\lg(10-x)=0$.

103. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+1}=64$.

104. $7^{\frac{3}{x}}=343$.

105. $4^{x-4}=64$.

106. $5^{x+2}=125$.

107. Решите уравнение $\log_3(4-x)=4$.

Найдите корень уравнения (108–112):

108. $5^{x-24}=\dfrac{1}{125}$.

109. $4^{x-11}=\dfrac{1}{64}$.

110. $\left(\frac{1}{3}\right)^{10x-2} = \frac{1}{27}$.

111. $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+2} = 625$.

112. $\log_3(x+4) = \log_3(5x+2)$.

Решите уравнение (113–119):

113. $\log_{\frac{1}{4}}(1-3x) = -2$.

114. $\log_{17}(5x+7) = \log_{17} 22$.

115. $\log_3(7x+1) = 3\log_9 4$.

116. $2^{x+3} = 4^{x-1}$.

117. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4} = 27$.

118. $5^{3x+7} = 0{,}04$.

119. $\left(\frac{1}{16}\right)^{2x-9} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$.

Найдите корень уравнения (120–123):

120. $\log_2(x+1) = 2$.

121. $2^{2x-4} = 16$.

122. $17^{x-16} = 17$.

123. $\left(\frac{1}{6}\right)^{2-x} = 36$.

124. Найдите корень уравнения $\log_{15}(2x+11) = \log_{15} 4$.

125. Найдите корень уравнения $\log_{0,5}(5x-1) = \log_{0,5} 14$.

Найдите корень уравнения (126–131):

126. $\left(\frac{1}{4}\right)^{11-9x} = \frac{1}{16}$.

127. $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-17} = 125$.

128. $\log_6(12 - 5x) = 2$.

129. $\log_7(3x - 8) = 2$.

130. $3^{5x-17} = 27$.

131. $2^{12-2x} = \frac{1}{8}$.

1.2.2. Тригонометрические уравнения

132. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\cos\frac{\pi(4x-7)}{3} = -\frac{1}{2}$.

133. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\frac{2\pi x}{3} = \frac{1}{2}$.

134. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\operatorname{tg}\frac{5\pi x}{4} = -1$.

1.2.3. Рациональные уравнения

135. Найдите корень уравнения $\frac{3}{7}x = -6\frac{3}{7}$.

136. Решите уравнение $\frac{1-2x}{x+13} = -3$.

137. Решите уравнение $-x = \frac{x+6}{-3x-4}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите наименьший из них.

138. Найдите корень уравнения $x^2 + 2x - 8 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите наименьший из них.

139. Решите уравнение $2x^2 - 9x - 35 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите их сумму.

Решите уравнение (140–141):

140. $(3x - 14)^2 = (3x + 2)^2$.

141. $(8x - 5)^2 = (8x + 5)^2$.

Найдите корень уравнения (142–145):

142. $\dfrac{15x}{6x^2-9} = -5$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

143. $\dfrac{16x^2-9}{12x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

144. $\dfrac{5x}{x-12} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

145. $\dfrac{14-3x}{2x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

146. Решите уравнение $\dfrac{x-3}{9x+4} = \dfrac{x-3}{4x+9}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

1.2.4. Иррациональные уравнения

Решите уравнение (147–158):

147. $\sqrt{128-x^2} = -x$.

148. $x-6 = \sqrt{8-x}$.

149. $x-3 = \sqrt{9-x}$.

150. $\sqrt{5x+2} = 10$.

151. $\sqrt{4x-6} = 12$.

152. $\sqrt{7x+1} = 6$.

153. $\sqrt{10-2x} = 4$.

154. $\sqrt{5x-3} = 2\sqrt{x}$.

155. $\sqrt{4-2x} = 2\sqrt{1-x}$.

156. $\sqrt{57-3x} = 3$.

157. $\sqrt{\dfrac{3x-17}{7}} = 4$.

158. $\sqrt{\dfrac{11}{6-4x}} = \dfrac{1}{2}$.

159. Решите уравнение $-x = \sqrt{15-2x}$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

Найдите корень уравнения (160–161):

160. $\sqrt{-41+3x} = 7$.

161. $\sqrt{-27-x} = 11$.

Найдите корень уравнения (162–163):

162. $\sqrt{\dfrac{2x-8}{4}}=3.$

163. $\sqrt{\dfrac{4}{5x-2}}=1.$

1.3. Функции

1.3.1. Возрастание, убывание, экстремум функции (без нахождения производной)

164. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 6)$. На рисунке 120 изображён график её производной. Укажите число точек максимума функции $y = f(x) - x - 2$ на промежутке $(-4; 6)$.

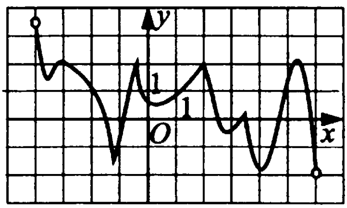


Рис. 120.

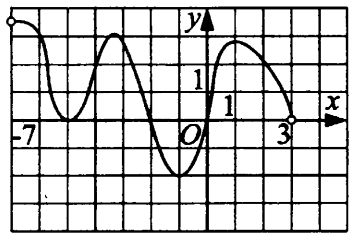


Рис. 121.

165. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-7; 3)$. На рисунке 121 изображён график её производной. Укажите точку минимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-7; 3)$.

166. Функция $y = g(x)$ определена на промежутке $(-6; 4)$. На рисунке 122 изображён график её производной. Найдите точку x_0, в которой функция $y = g(x)$ принимает наибольшее значение на отрезке $[-4; 1]$.

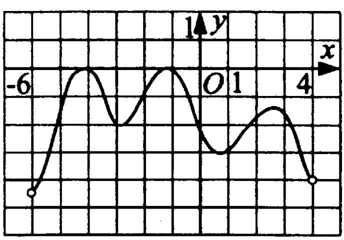


Рис. 122.

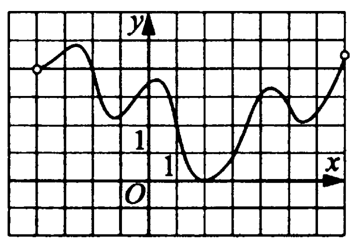


Рис. 123.

167. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 7)$. На рисунке 123 изображён график её производной. Найдите точку x_0, в которой функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение на отрезке $[-2; 5]$.

168. Функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на интервале $(-6; 4)$. На рисунке 124 изображён график её производной. В какой точке функция $y = f(x)$ достигает своего наименьшего значения?

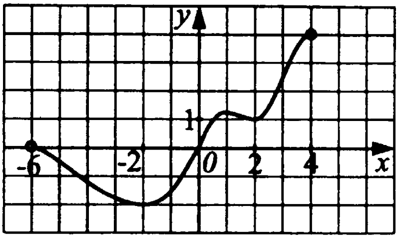


Рис. 124.

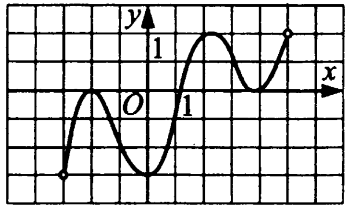


Рис. 125.

169. Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-3; 5)$. На рисунке 125 изображён график её производной. Укажите количество точек максимума функции $y = f(x)$.

170. Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-3; 5)$. На рисунке 126 изображён график её производной. Укажите количество точек минимума.

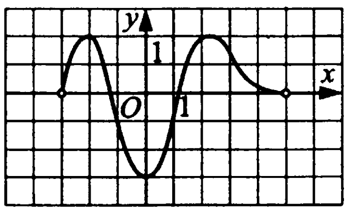


Рис. 126.

171. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3; 5)$. На рисунке 127 изображён график её производной. Укажите количество точек экстремума.

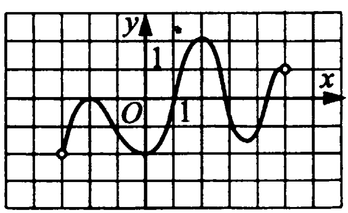


Рис. 127.

1.3.2. График функции

172. На рисунке 128 изображен график изменения скорости движения автомобиля в зависимости от времени. На оси абсцисс отмечается время движения в часах, на оси ординат — скорость в километрах в час. Сколько часов автомобиль двигался со скоростью не менее 60 км/ч?

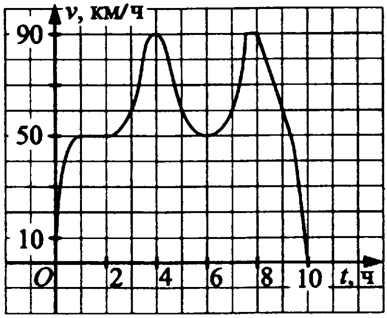


Рис. 128.

173. На рисунке 129 изображён график изменения курса евро в течение 5 дней с 4 марта по 8 марта. Определите наименьшую стоимость евро 6 марта (в руб).

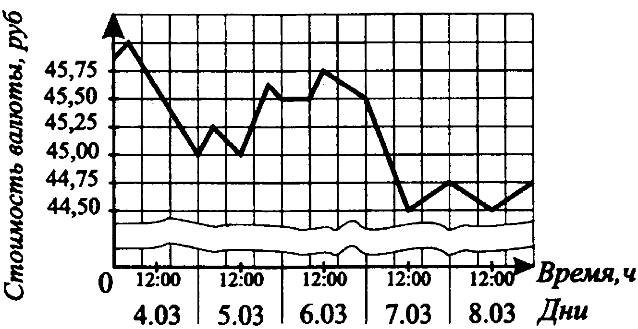


Рис. 129.

174. На графике (см. рис. 130) показано изменение скорости велосипедиста на протяжении трёхчасовой поездки за город (по оси ординат откладывается скорость в км/ч, по оси абсцисс — время в часах). Определите по графику максимальную скорость велосипедиста за вторую половину пути.

175. В инкубаторе требуется поддерживать температуру воздуха от 37 °C до 39 °C. На рисунке 131 показано, как изменялась температура воздуха в инкубаторе в течение 12 часов. Сколько часов температура воздуха в инкубаторе удовлетворяла требованиям?

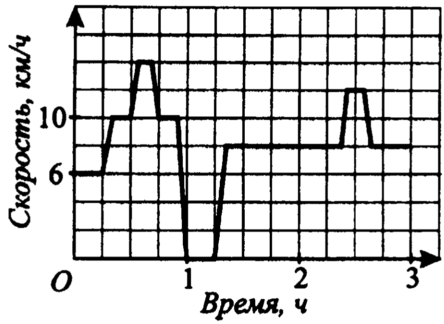


Рис. 130.

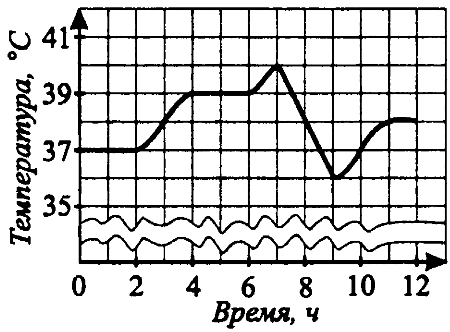


Рис. 131.

176. На графике (см. рис. 132) показано изменение популяции кабанов в лесополосе за год. Определите наименьшее число особей летом.

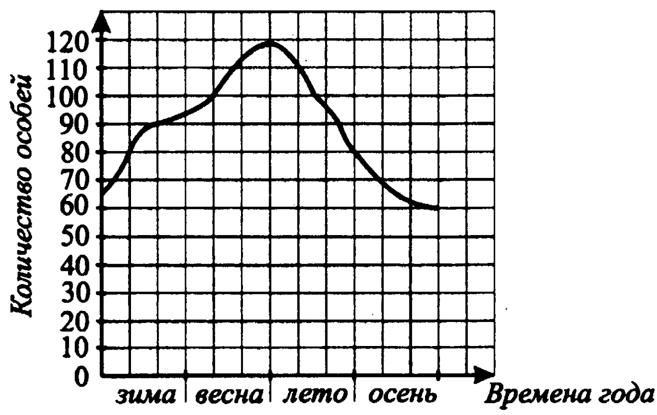


Рис. 132.

177. На графике (см. рис. 133) показано изменение количества выпавших осадков по области в течение месяца. Определите по графику количество дней в этом месяце, когда осадки не выпадали.

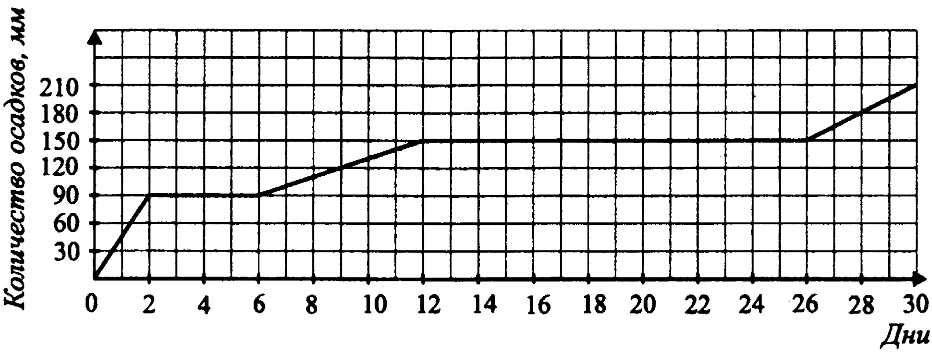


Рис. 133.

178. На рисунке 134 жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 14 по 28 мая 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена нефти на момент закрытия торгов была наименьшей.

Рис. 134.

179. На рисунке 135 жирными точками показан курс евро по отношению к рублю во все дни с 31 октября по 30 ноября 2008 года. По горизонтали указывается шкала месяца, по вертикали — курс евро к рублю. Определите по рисунку, в какой из дней ноября 2008 года было выгоднее всего купить евро.

Рис. 135.

180. На рисунке 136 жирными точками показан курс евро по отношению к рублю во все дни с 31 октября по 30 ноября 2008 года. По горизонтали указывается шкала месяца, по вертикали — курс евро к рублю. Определите по рисунку, в какой из дней ноября 2008 года было выгоднее всего продать евро.

Рис. 136.

181. На рисунке 137 жирными точками показана среднесуточная температура воздуха с 13 по 31 июня. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Используя график, определите наименьшую среднесуточную температуру в период с 17 по 28 июня.

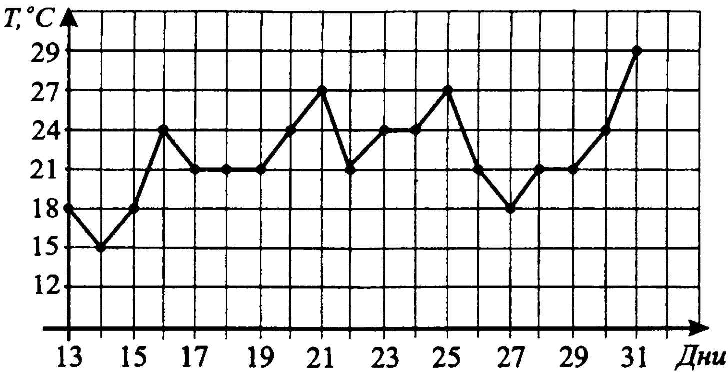


Рис. 137.

182. На графике (см. рис. 138) представлено изменение стоимости акций мебельной компании в период с 18 июля по 5 августа. 20 июля предприниматель купил пакет акций, а 4 августа продал его и в результате получил прибыль 2700 рублей. Сколько акций было в пакете?

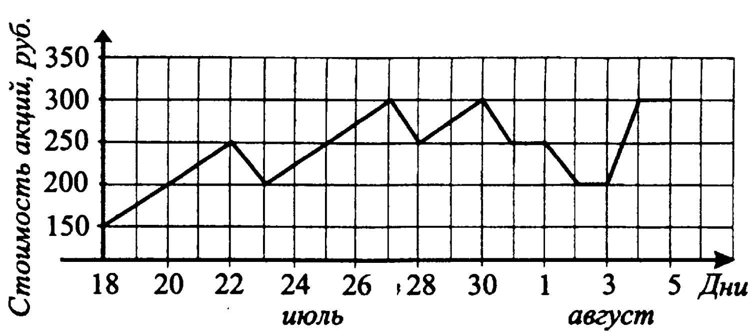


Рис. 138.

183. На графике (см. рис. 139) представлены изменения стоимости акций косметической компании в первые две недели декабря. Предприниматель купил 30 акций 9 декабря и собирается получить прибыль, равную 4500 рублей. Какого числа предприниматель должен продать все акции, чтобы получить в точности ту прибыль, на которую он рассчитывал?

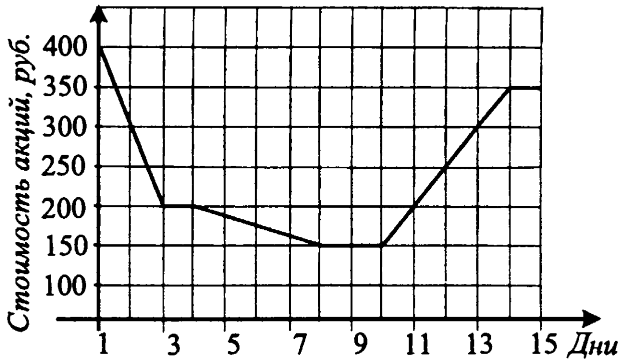


Рис. 139.

184. На графике (см. рис. 140) представлены изменения стоимости акций компании «Море и горы» в первые две недели октября. В первую неделю октября бизнесмен купил 18 акций, а потом продал их на второй неделе. Какую наибольшую прибыль (в рублях) он мог получить?

Рис. 140.

185. На графике (см. рис. 141) представлены изменения стоимости акций компании «Гиацинт» в первые три недели июля. 4 июля бизнесмен купил 20 акций этой компании. Четверть из них он продал 12 июля, а остальные — 15 июля. Сколько рублей бизнесмен потерял в результате этих операций?

186. Посев семян моркови рекомендуется проводить в начале мая при дневной температуре воздуха не ниже $+8\,°C$. На рисунке 142 показан прогноз дневной температуры воздуха в течение первых двух недель мая. Определите, в течение скольких дней за период с 3 по 12 мая можно производить посев моркови.

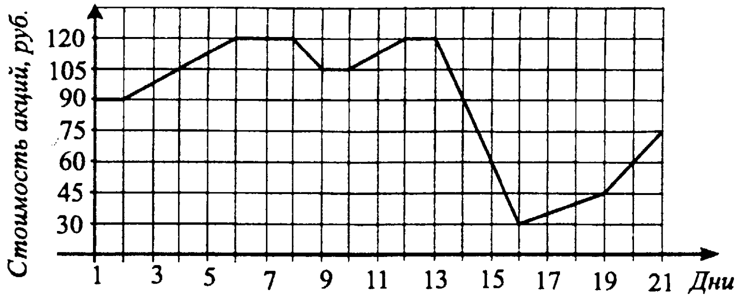


Рис. 141.

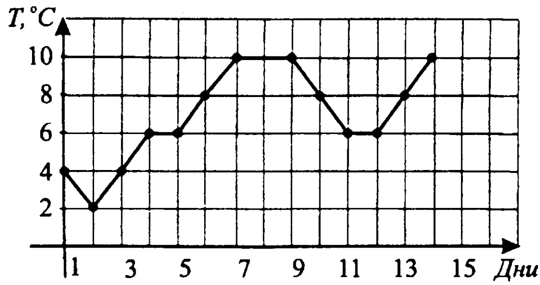


Рис. 142.

187. На рисунке 143 точками отмечено среднесуточное давление воздуха в Ростове-на-Дону с 12 по 19 февраля 2010 года. Для наглядности точки на графике соединены линиями. По графику определите наибольшее давление в период с 14 по 19 февраля.

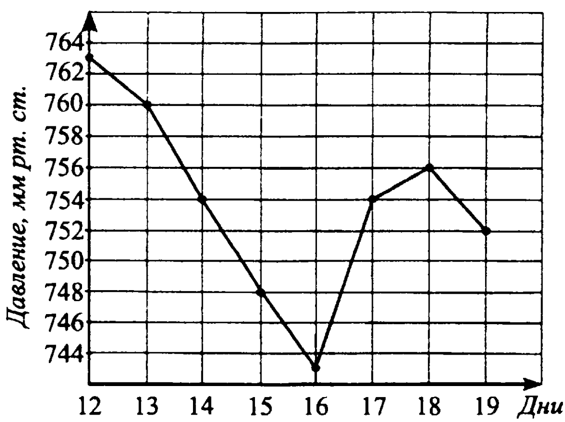


Рис. 143.

188. На рисунке 144 изображён график зависимости температуры в Ростове-на-Дону от времени с 12 по 17 февраля 2010 года. По графику определите наибольшую температуру воздуха в Ростове-на-Дону с 12 по 15 февраля.

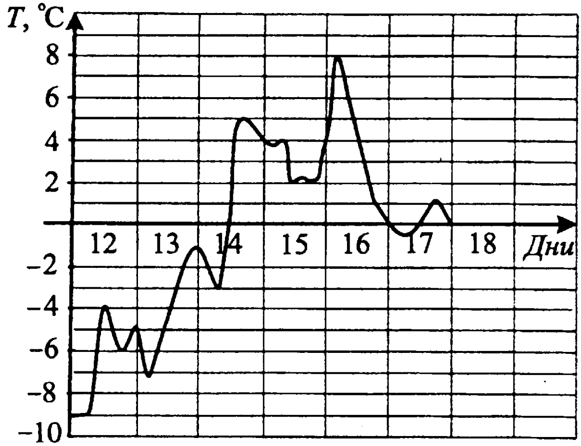


Рис. 144.

189. На рисунке 145 жирными точками показана среднесуточная влажность воздуха в Ростове-на-Дону с 12 по 19 февраля 2010 года. Для наглядности точки на рисунке соединены линиями. Определите наименьшую среднесуточную влажность воздуха за указанный период.

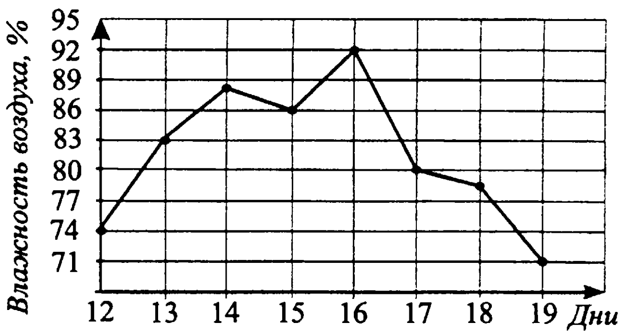


Рис. 145.

190. На рисунке 146 жирными точками показано суточное количество осадков, выпавших в Казанской области с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день в миллиметрах. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало более 2 миллиметров осадков.

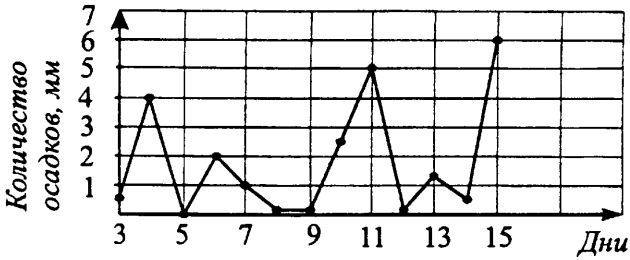


Рис. 146.

191. На диаграмме (см. рис. 147) показано число автомобилей, продаваемых фирмой за каждый месяц 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество автомобилей. Определите по диаграмме количество месяцев, в каждом из которых было продано менее 5000 автомобилей.

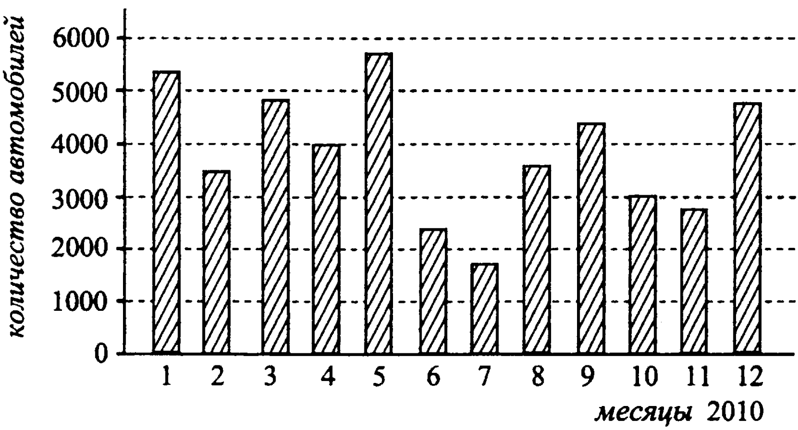


Рис. 147.

192. На диаграмме (см. рис. 148) показано изменение температуры воздуха на протяжении четырёх суток. По горизонтали указывается время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по диаграмме самую высокую температуру 16 марта. Ответ дайте в градусах Цельсия.

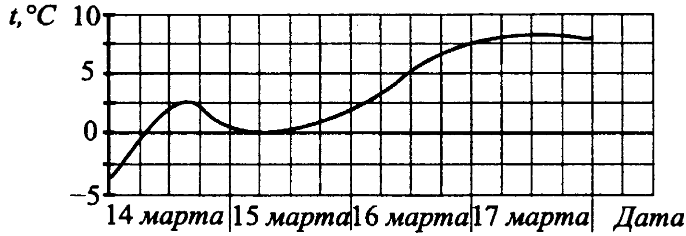


Рис. 148.

193. На рисунке 149 показано изменение цены акций некоторой компании за период с 29.08.2011 г. по 25.09.2011 г. в рублях. По горизонтали отмечены дни, по вертикали — цены акций этой компании за указанный период.

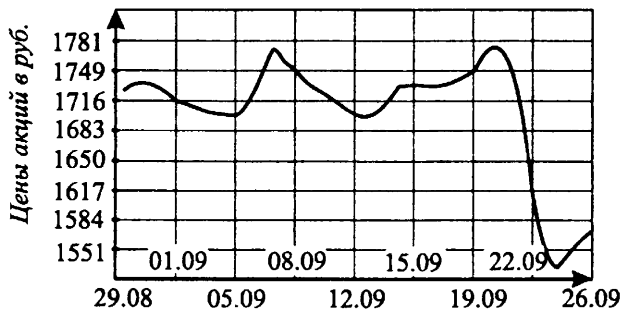


Рис. 149.

Найдите разность (в рублях) между ценами акций этой компании 01.09.2011 и 22.09.2011.

194. На диаграмме (см. рис. 150) показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Челябинске. Найдите количество месяцев со среднемесячной температурой выше 15 °C.

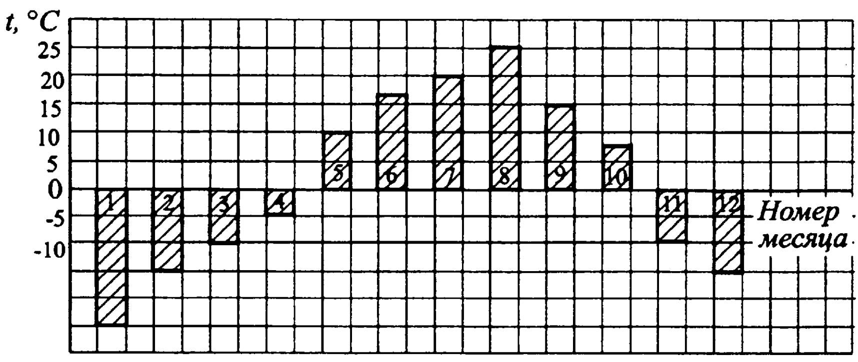


Рис. 150.

195. На диаграмме (см. рис. 151) показано изменение среднегодового курса доллара с 2003 по 2010 годы. На оси абсцисс отмечается время в годах, на оси ординат — стоимость доллара в рублях. Укажите самый большой среднегодовой курс доллара за период с 2007 по 2010 годы. Ответ дайте в рублях.

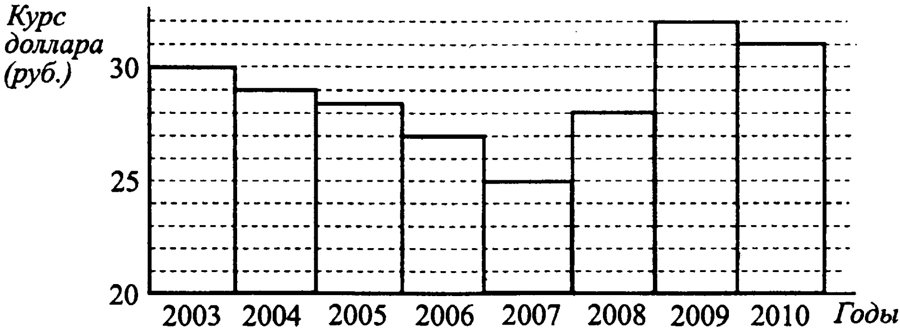


Рис. 151.

196. На диаграмме (см. рис. 152) показан уровень атмосферных осадков H (мм) в Нижнем Новгороде в 2004 году. По горизонтали отмечается время в месяцах (указаны номера месяцев в году), по вертикали — ежемесячный уровень выпавших осадков (в мм). Сколько раз уровень осадков был ниже, чем в предыдущем месяце?

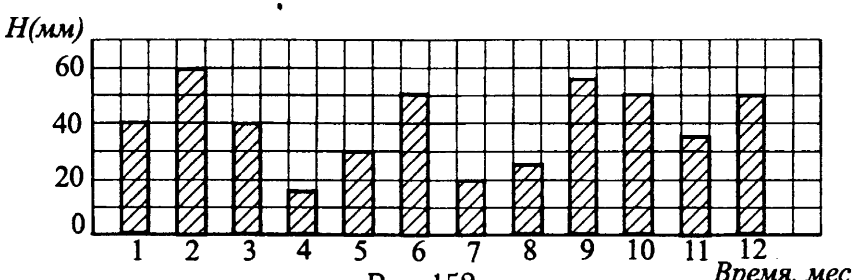


Рис. 152.

197. На диаграмме (см. рис. 153) показано изменение цены нефти в период с 2003 по 2006 год. По горизонтали отмечается год, по вертикали — стоимость одного литра нефти в рублях. Укажите год в период с 2003 по 2006, когда цена одного литра в течение всех кварталов была одной и той же.

198. При работе фонарика батарейка разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке 154 показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси

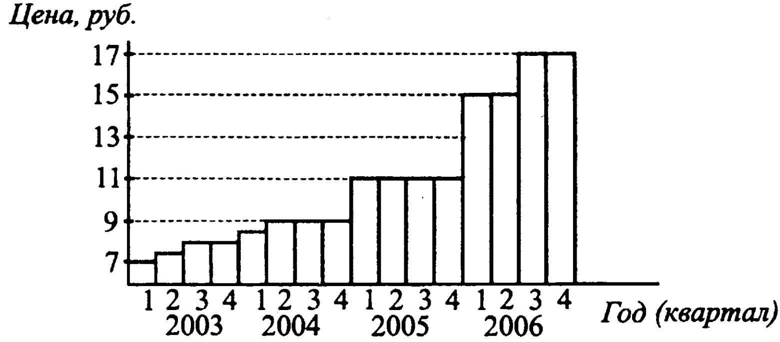


Рис. 153.

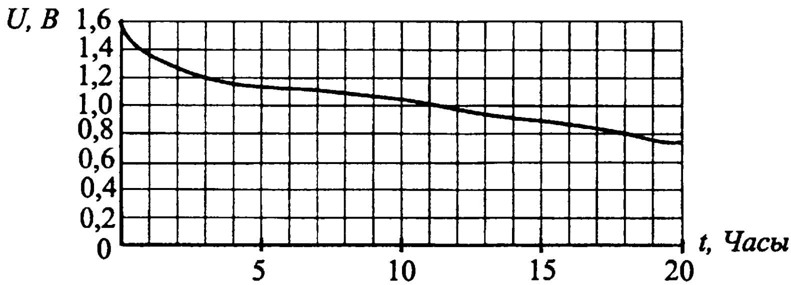


Рис. 154.

отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах.

Определите по рисунку, за сколько часов напряжение упадёт с 1,2 вольт до 0,8 вольт.

199. На графике (см. рис. 155) показана температура воздуха с 15 по 18 июля в некотором городе. По горизонтали отмечается время суток в часах (деления проведены через каждые 6 часов), по вертикали — температура воздуха в градусах Цельсия. Найдите по графику наибольшую температуру воздуха (в градусах Цельсия) 16 июля.

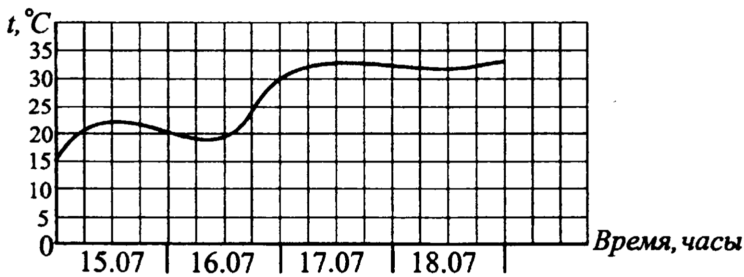


Рис. 155.

200. На рисунке 156 точками показано суточное количество осадков, выпавших в Томске 22 октября в 1925, 1930, 1935, 1940, 1945, 1950, 1955, 1960 годах. По горизонтали указываются года, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий год в миллиметрах. Для наглядности точки соединены линией. Определите по рисунку, какое наибольшее количество осадков выпало 22 октября в Томске в рассмотренные годы. Ответ дайте в миллиметрах.

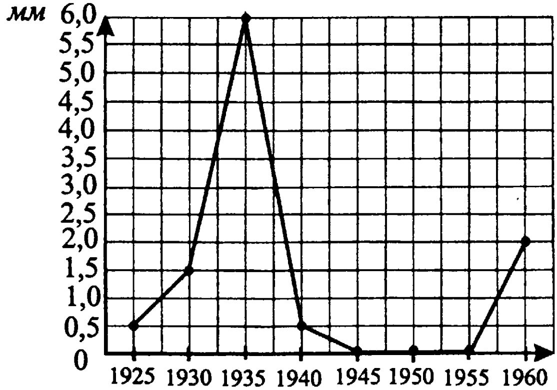


Рис. 156.

201. На графике (см. рис. 157) показан процесс нагревания некоторого прибора. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента включения прибора, на оси ординат — температура прибора в градусах Цельсия.

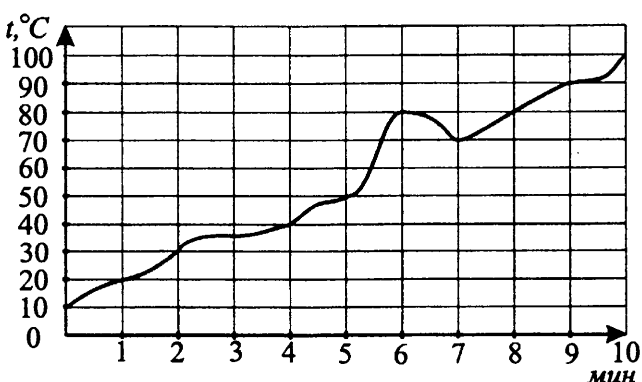


Рис. 157.

Определите по рисунку, за сколько минут прибор нагреется от 50 °C до 90 °C.

202. На графике (см. рис. 158) показано изменение температуры воздуха в некотором городе с 5 сентября по 7 сентября. По горизонтали указано время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры за весь этот период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

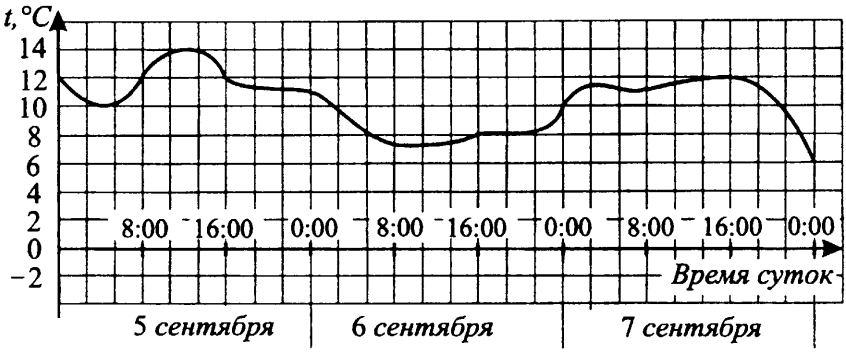


Рис. 158.

203. На диаграмме (см. рис. 159) показано распределение площадей (в тыс. га) сельскохозяйственных угодий в Центральном федеральном округе. По горизонтали указаны названия сельскохозяйственных угодий, по вертикали — занимаемая ими площадь.

Рис. 159.

Определите по диаграмме, сколько тыс. га сельскохозяйственных угодий в Центральном ФО занято в сумме под залежь и насаждения.

204. На диаграмме (см. рис. 160) показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) на протяжении одного года в некотором городе. По горизонтали отмечается номер месяца в году, по вертикали — температура воздуха. Укажите количество месяцев, в которых среднемесячная температура воздуха была выше 5 °C.

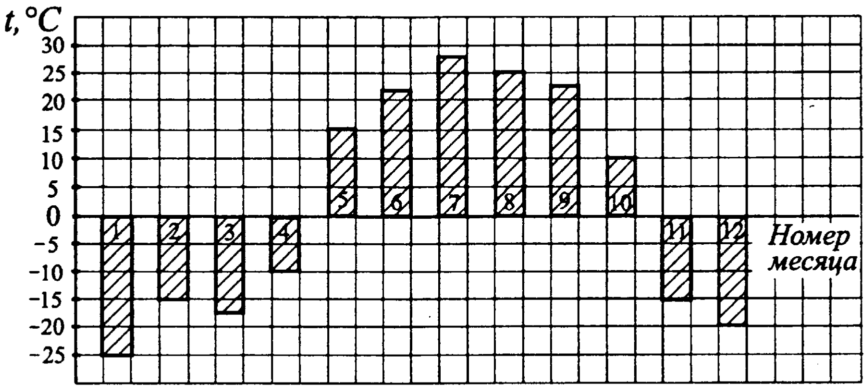


Рис. 160.

1.3.3. Производная функции

Вычисление производной

205. Вычислите производную функции $y = \dfrac{(11x+2)^2}{e^x}$ в точке $x = 0$.

206. Вычислите производную функции $y = \dfrac{(2x+3)^3}{e^x}$ в точке $x = 0$.

207. Найдите производную функции $\ln x - 3x^2 + 5x + 2$ и вычислите её значение при $x = 5$.

Геометрический смысл производной

208. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику производной $f'(x)$ функции $f(x) = 3\operatorname{ctg}^2 x$ в его точке с абсциссой $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

209. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 5)$. На рисунке 161 изображён график производной этой функции. Найдите количество точек графика функции, в которых касательные наклонены под углом 120° к положительному направлению оси абсцисс.

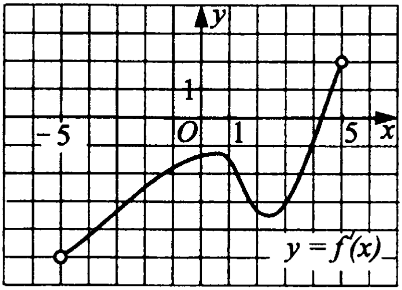


Рис. 161.

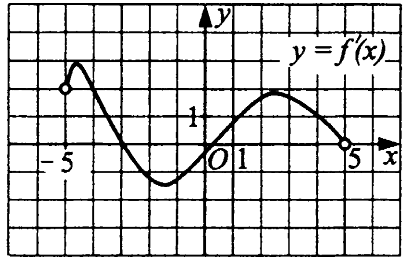


Рис. 162.

210. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 5)$. На рисунке 162 изображён график производной этой функции. Найдите количество точек графика функции, в которых касательные наклонены под углом 150° к положительному направлению оси абсцисс.

211. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 5)$. На рисунке 163 изображён график производной этой функции. К графику функции $y = f(x)$ провели касательные во всех точках, абсциссы которых — положительные целые числа. Укажите количество точек графика функции $y = f(x)$, в которых проведённые касательные имеют отрицательный угловой коэффициент.

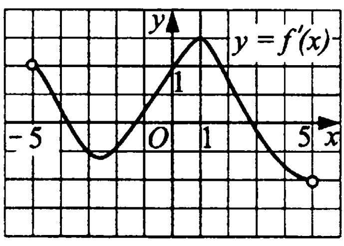


Рис. 163.

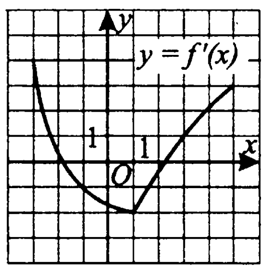


Рис. 164.

212. К графику функции $y = f(x)$ проведена касательная в точке с абсциссой $x_0 = 3$. Определите градусную меру угла наклона касательной, если на рис. 164 изображён график производной этой функции.

213. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = -3$, если на рисунке 165 изображён график производной этой функции.

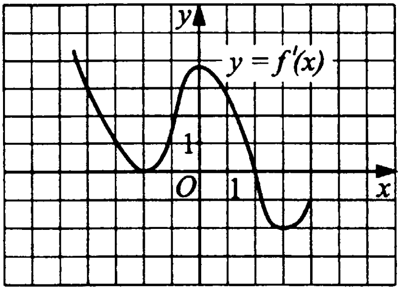


Рис. 165.

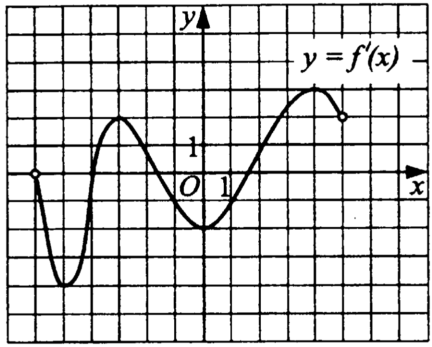


Рис. 166.

214. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$, если на рисунке 166 изображён график производной этой функции.

215. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведённой к графику функции $f(x) = 5x^2 - 7x + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

216. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведённой к графику функции $f(x) = 2x^2 + 3x - 8$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

217. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 4)$. На рисунке 167 изображён график её производной. Найдите число касательных к графику функции $y = f(x)$, которые наклонены под углом в $45°$ к положительному направлению оси абсцисс.

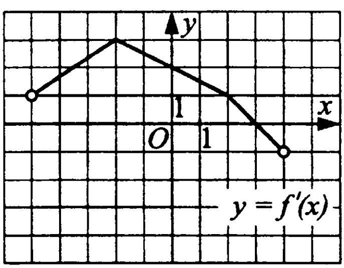


Рис. 167.

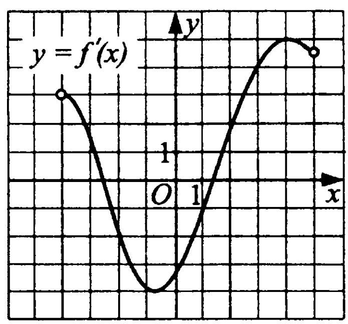


Рис. 168.

218. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 5)$. На рисунке 168 изображён график её производной. Найдите угол наклона (в градусах) касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = 1$ к положительному направлению оси Ox.

219. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-2; 4)$. На рисунке 169 изображён график её производной. Определите абсциссу точки, касательная в которой составляет с осью Ox угол в 45°.

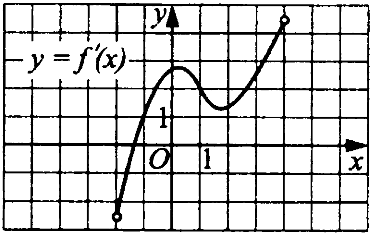


Рис. 169.

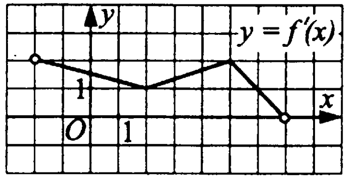


Рис. 170.

220. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-2; 7)$. На рисунке 170 изображён график её производной. Найдите число касательных к графику функции $y = f(x)$, которые наклонены под углом в 30° к положительному направлению оси абсцисс.

221. В точке A графика функции $y = -x^2 + 4x + 11$ проведена касательная к нему, параллельная прямой $y = 1 - 2x$. Найдите сумму координат точки A.

222. На рисунке 171 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке $(2; -1)$. Найдите значение производной этой функции при $x = 2$.

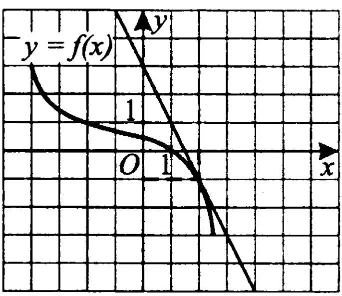


Рис. 171.

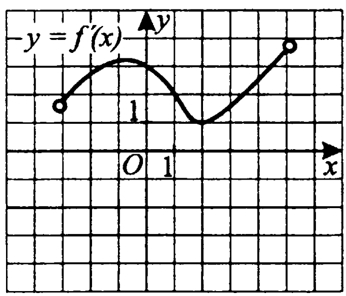


Рис. 172.

223. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3; 5)$. На рисунке 172 изображён график её производной. Найдите угол наклона касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$, к положительному направлению оси Ox в точке с абсциссой $x_0 = 2$. Ответ укажите в градусах.

224. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = e^{2x+1} - 3x^4$ в точке с абсциссой $x_0 = -0{,}5$.

225. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = 2e^{5x-2} + 5x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{2}{5}$.

226. На рисунке 173 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой, равной 1. Найдите значение производной этой функции в точке $x_0 = 1$.

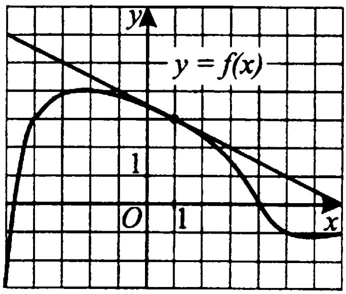


Рис. 173.

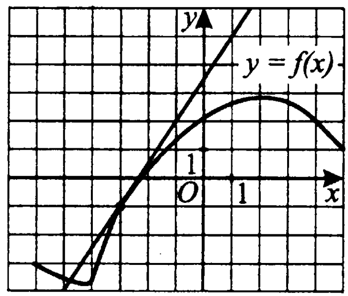


Рис. 174.

227. На рисунке 174 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой, равной -3. Найдите значение производной этой функции в точке $x_0 = -3$.

228. Прямая $y = 38x - 28$ параллельна касательной к графику функции $y = 3x^2 + 8x - 2$. Найдите абсциссу точки касания.

229. На рисунке 175 изображены график функции $f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f(x)$ в точке x_0.

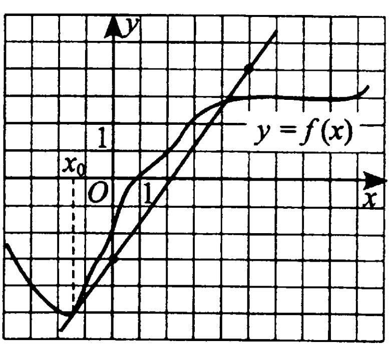


Рис. 175.

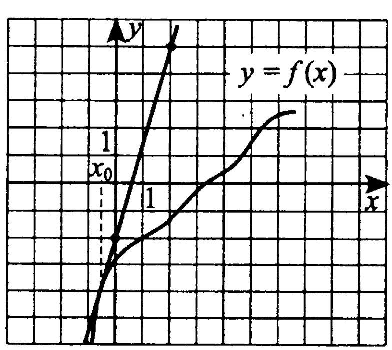


Рис. 176.

230. На рисунке 176 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

231. На рисунке 177 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

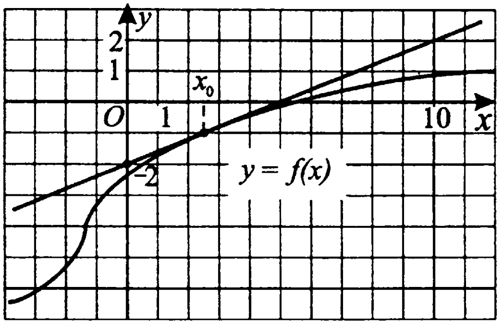


Рис. 177.

232. На рисунке 178 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

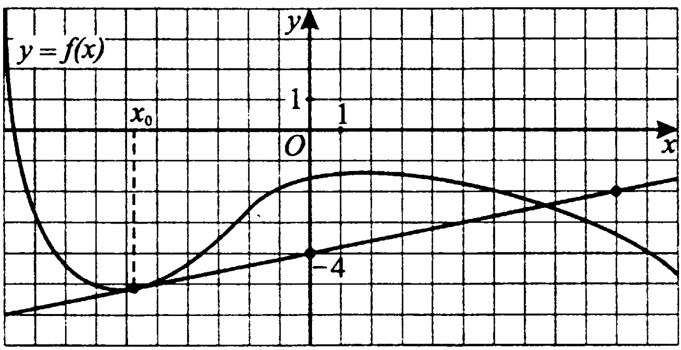


Рис. 178.

233. На рисунке 179 изображён график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 5. Найдите $f'(5)$.

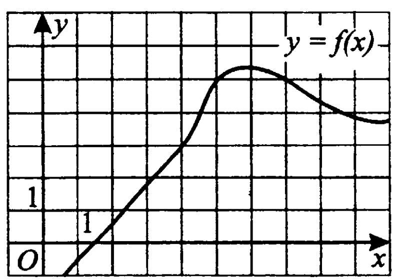


Рис. 179.

234. На рисунке 180 изображён график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 6. Найдите $f'(6)$.

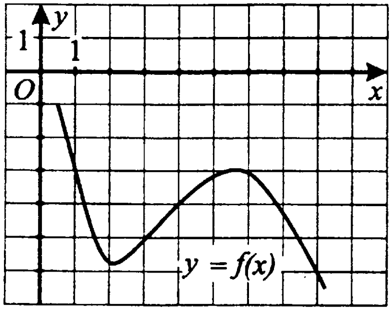


Рис. 180.

235. На рисунке 181 изображён график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 1$ или совпадает с ней.

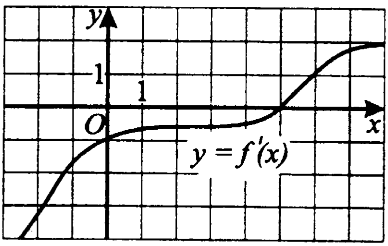


Рис. 181.

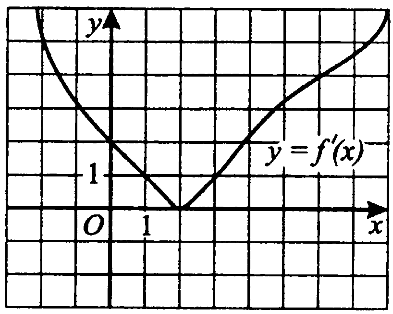


Рис. 182.

236. На рисунке 182 изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 1$ или совпадает с ней.

237. Прямая $y = 3x - 10$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 5x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

238. Прямая $y = -x - 3$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3{,}5x^2 + x - 1$. Найдите абсциссу точки касания.

239. На рисунке 183 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-8; 7]$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.

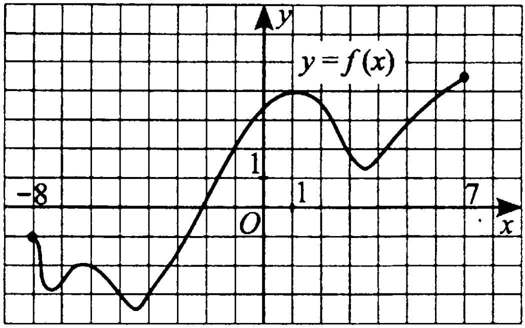


Рис. 183.

240. На рисунке 184 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-8; 7]$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -15$.

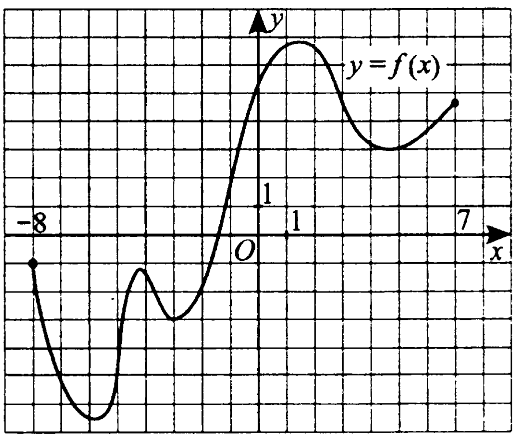


Рис. 184.

241. На рисунке 185 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. В какой точке отрезка $[-7; -3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

242. На рисунке 186 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -x + 2$ или совпадает с ней.

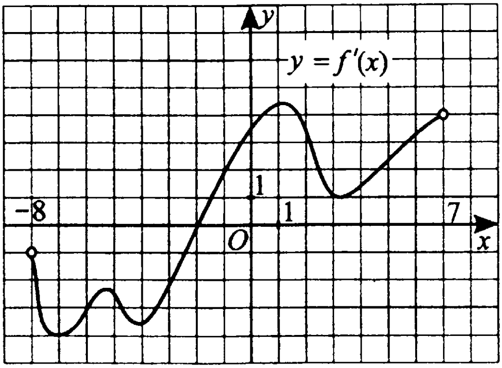


Рис. 185.

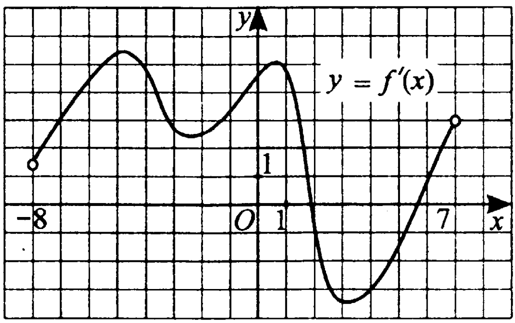


Рис. 186.

243. На рисунке 187 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Определите, в какой точке отрезка $[2; 6]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение.

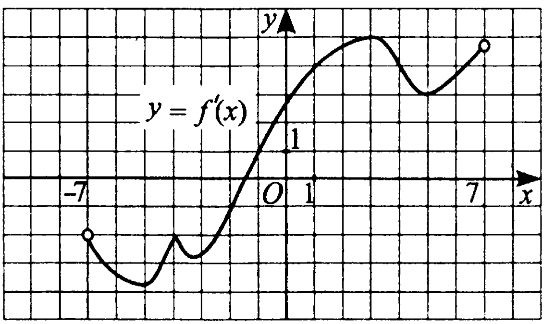


Рис. 187.

244. На рисунке 188 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на интервале $(-1; 5)$.

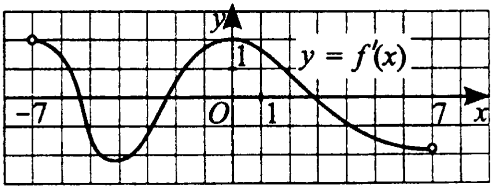


Рис. 188.

245. На рисунке 189 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -3x + 5$ или совпадает с ней.

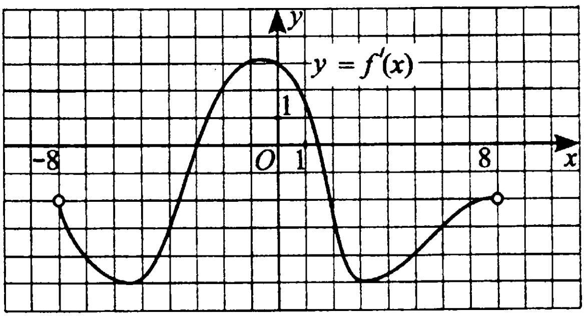


Рис. 189.

246. На рисунке 190 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-6; 6]$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.

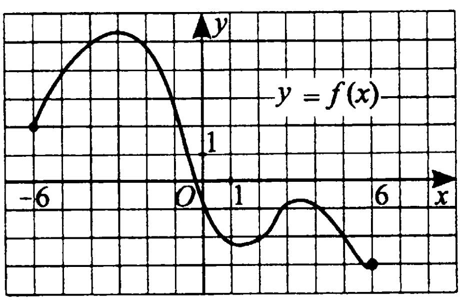


Рис. 190.

247. На рисунке 191 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 7)$. В какой точке отрезка $[-4; 1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

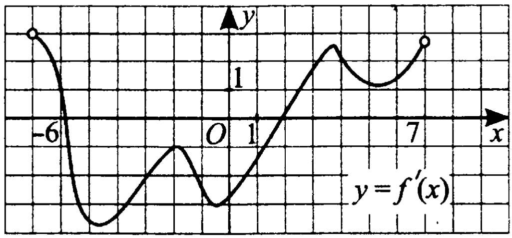


Рис. 191.

248. На рисунке 192 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на интервале $(-6; 5)$.

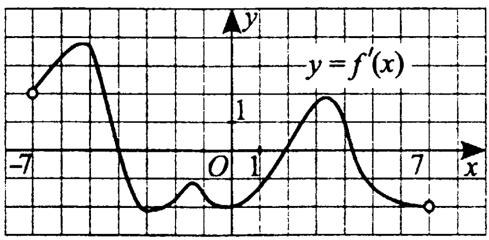


Рис. 192.

249. На рисунке 193 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Найдите промежутки убывания функции $y = f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

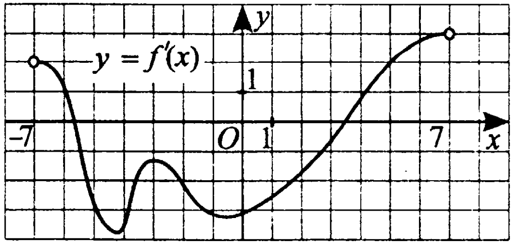


Рис. 193.

250. На рисунке 194 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 10)$. Укажите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 15$.

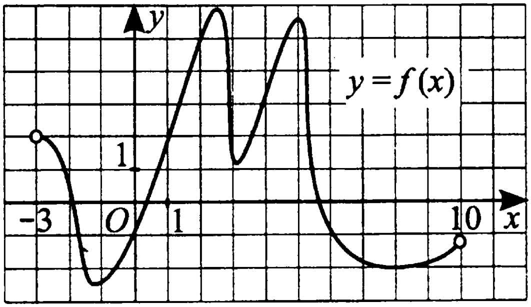


Рис. 194.

251. На рисунке 195 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-3; 10]$. Найдите сумму абсцисс точек экстремума функции $f(x)$.

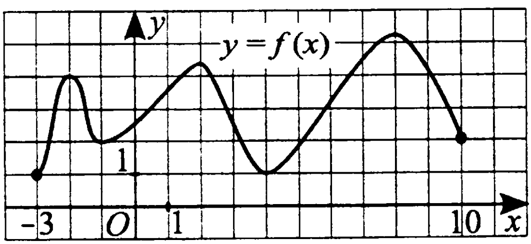


Рис. 195.

252. На рисунке 196 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 10)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-2; 9]$.

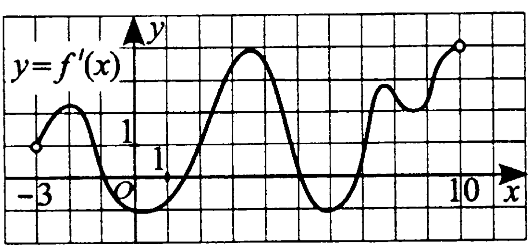


Рис. 196.

253. На рисунке 197 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 3)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-7; 2]$.

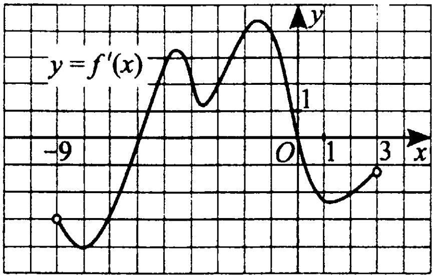


Рис. 197.

254. На рисунке 198 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

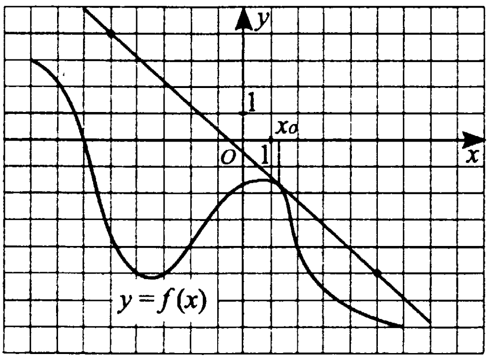


Рис. 198.

255. Функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[-4; 4]$. На рисунке 199 изображён график этой функции. Найдите наибольшую из длин промежутков возрастания функции.

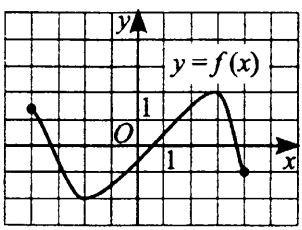


Рис. 199.

256. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-4; 6]$. На рисунке 200 изображён график этой функции. Найдите наибольшую из длин промежутков убывания функции.

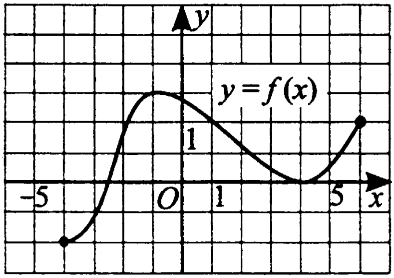


Рис. 200.

257. На рисунке 201 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

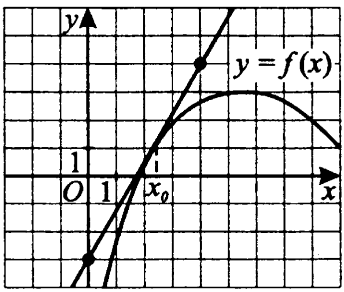


Рис. 201.

258. На рисунке 202 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

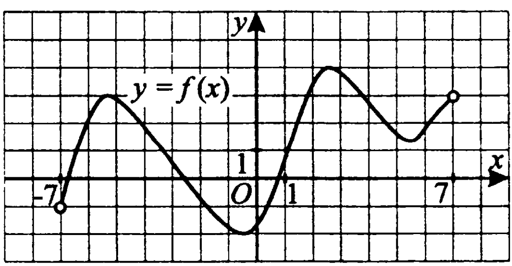


Рис. 202.

259. На рисунке 203 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 6)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

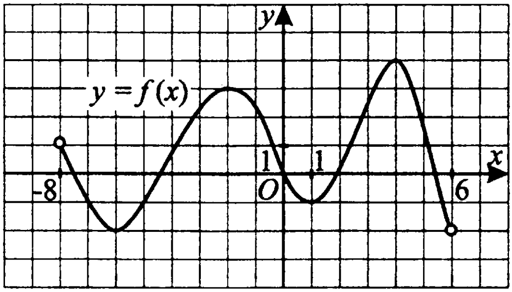


Рис. 203.

260. На рисунке 204 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 10)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-6; 8]$.

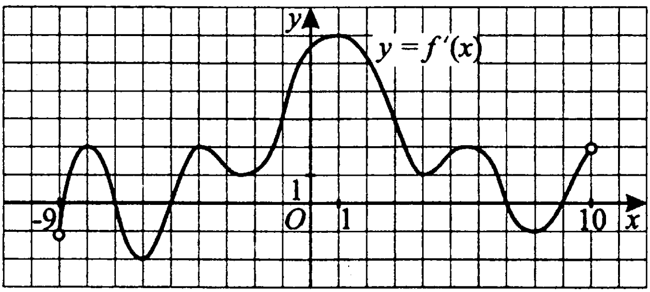


Рис. 204.

261. На рисунке 205 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 10)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

262. На рисунке 206 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-10; 5)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

263. Прямая $y = 9x + 5$ является касательной к графику функции $y = -x^2 + bx - 11$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 1.

264. Прямая $y = 3x - 2$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 4x - 5$. Найдите абсциссу точки касания.

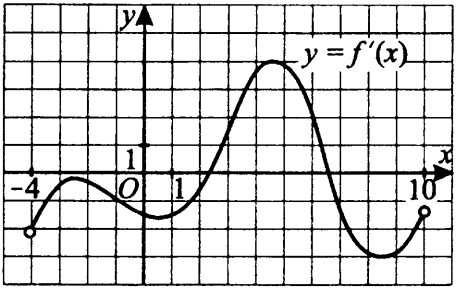


Рис. 205.

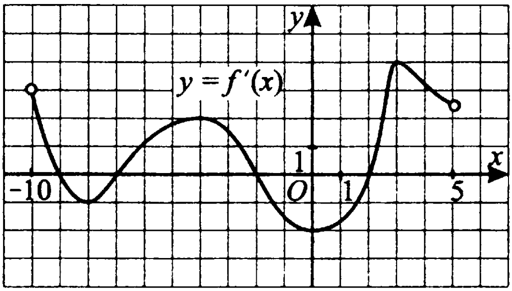


Рис. 206.

265. Прямая $y = 3x + 30$ параллельна касательной к графику функции $y = x^3 + 5x^2 - 5x - 18$. Найдите наименьшую из возможных абсцисс точек касания.

266. На рисунке 207 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 8)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

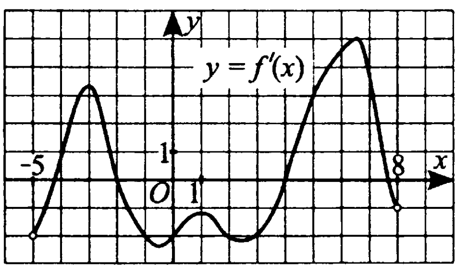


Рис. 207.

267. На рисунке 208 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 11)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4; 10]$.

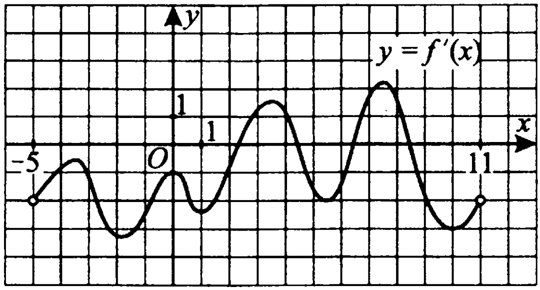


Рис. 208.

268. На рисунке 209 изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены семь точек: x_1, x_2, … x_7. Среди этих точек найдите все точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответе запишите количество найденных точек.

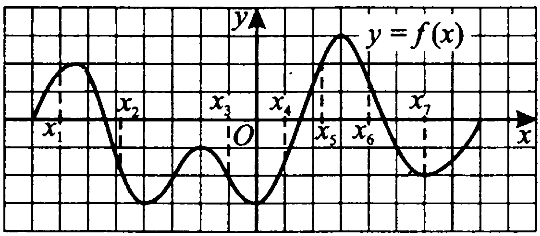


Рис. 209.

269. Прямая $y = -x + 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 + 2x + 6$. Найдите абсциссу точки касания.

270. На рисунке 210 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 7)$. В какой точке отрезка $[-4; 5]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

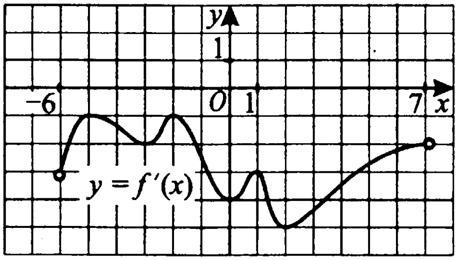


Рис. 210.

271. На рисунке 211 изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 10)$. На оси абсцисс отмечены шесть точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Среди этих точек найдите все точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю. В ответе запишите количество найденных точек.

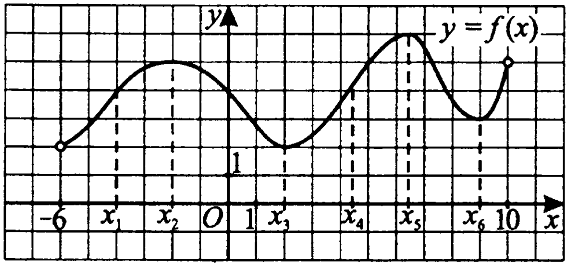


Рис. 211.

272. На рисунке 212 изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены восемь точек $x_1, x_2, \ldots, x_8$. Среди этих точек найдите все точки, в которых производная функции $f(x)$ положительна. В ответе запишите количество найденных точек.

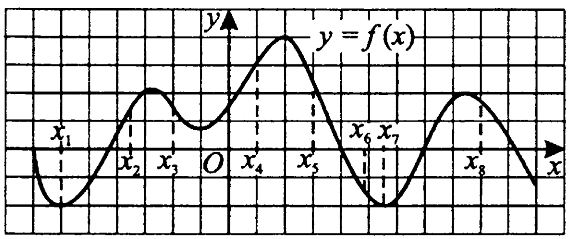


Рис. 212.

273. На рисунке 213 изображены график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

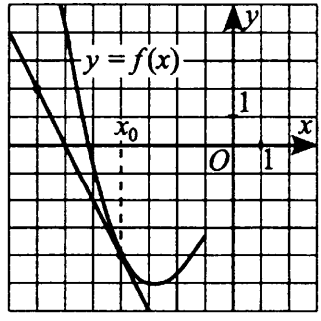


Рис. 213.

274. На рисунке 214 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 8$.

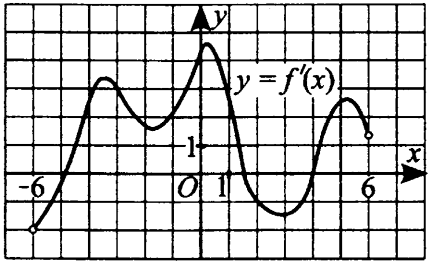


Рис. 214.

275. На рисунке 215 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке x_0. Уравнение касательной $y = 2x - 6$. Найдите значение производной функции $y = -\frac{1}{2}f(x) + 7$ в точке x_0.

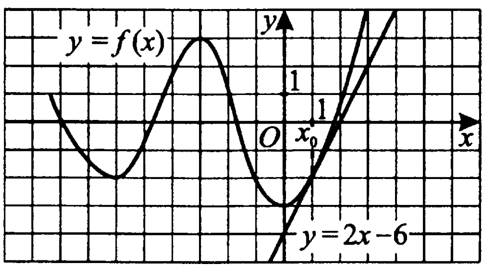


Рис. 215.

276. На рисунке 216 изображён график функции $y = f(x)$, определённой и дифференцируемой на интервале $(-6; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 4$.

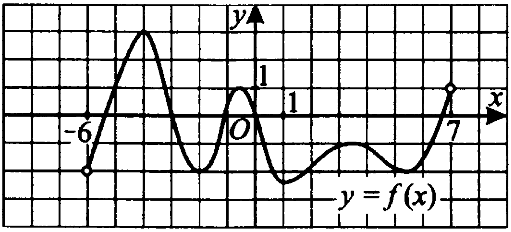


Рис. 216.

277. На рисунке 217 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-5; 3]$.

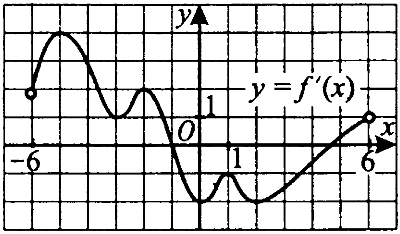


Рис. 217.

278. На рисунке 218 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 4)$. В какой точке отрезка $[-6; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

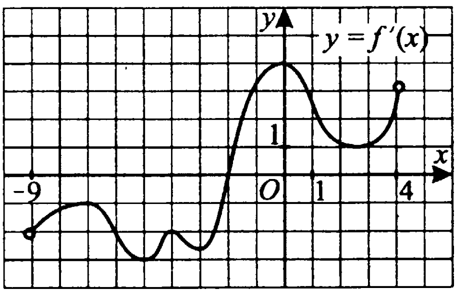


Рис. 218.

279. На рисунке 219 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 7)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-8; 6]$.

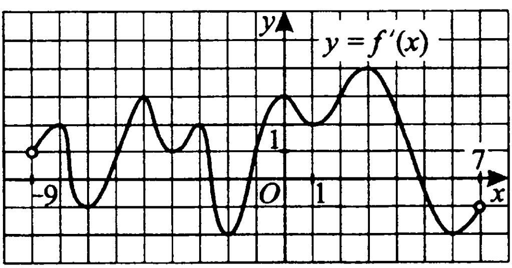


Рис. 219.

280. На рисунке 220 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

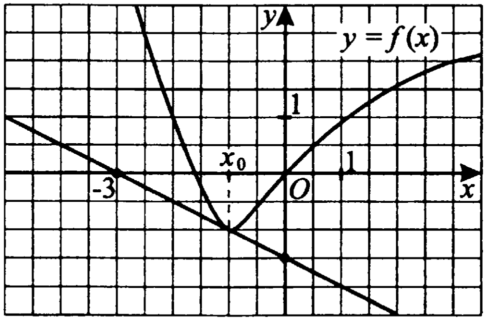


Рис. 220.

281. На рисунке 221 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 7)$. В какой точке отрезка $[-2; 6]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

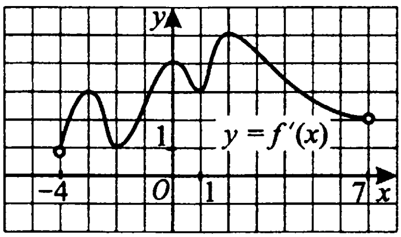


Рис. 221.

282. На рисунке 222 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

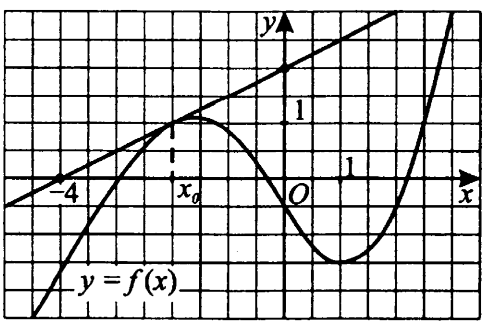


Рис. 222.

Физический смысл производной

283. Точка движется по координатной прямой согласно закону $x(t) = 1{,}5t^2 - 3t + 7$, где $x(t)$ — координата в момент времени t. В какой момент времени скорость точки будет равна 12?

284. Точка движется по координатной прямой по закону $x(t) = 0{,}75t^2 + t - 7$, где $x(t)$ — координата точки в момент времени t. В какой момент времени скорость точки будет равна 19?

285. Точка движется по координатной прямой согласно закону $x(t) = -2t^2 + 20t - 7$, где $x(t)$ — координата точки в момент времени t. В какой точке координатной прямой произойдет мгновенная остановка?

286. На рисунке 223 представлены график движения тела и касательная к графику в момент времени $t = 5$. Определите по графику скорость движения тела (в км/ч) в этот момент времени.

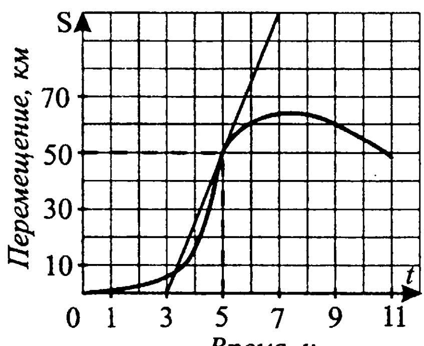


Рис. 223.

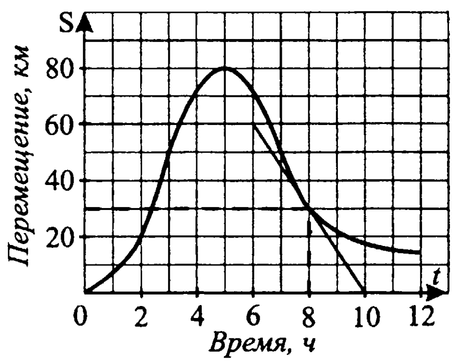


Рис. 224.

287. На рисунке 224 представлены график движения тела и касательная к графику в момент времени $t = 8$. Определите по графику скорость движения тела (в км/ч) в этот момент времени.

288. Перемещение материальной точки задано функцией $y = S(t)$ на промежутке $[0; 8]$. На рисунке 225 изображён график её производной. Найдите момент времени, в который скорость данной точки была равна 2.

289. Перемещение материальной точки задано функцией $y = S(t)$ на промежутке $[0; 8]$. На рисунке 226 изображён график её производной. Найдите момент времени, в который скорость данной точки была равна 3.

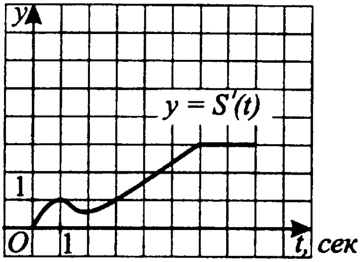


Рис. 225.

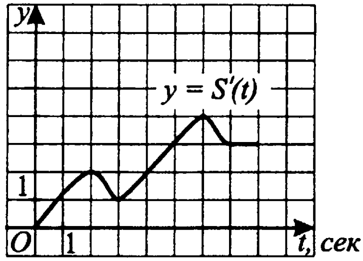


Рис. 226.

290. Мотоциклист в первые 5 с движения проезжал расстояние (в метрах), которое можно описать формулой $S(t) = t^3 + 3t$. Найдите его ускорение в момент времени $t = 1$ (в м/с^2).

291. При проведении испытаний нового скоростного болида в первые 6 с его движения скорость изменялась по формуле $v(t) = 36t - 3t^2$ в метрах в секунду. Какое расстояние прошёл болид за это время? (Ответ укажите в метрах.)

292. Ребёнок на санках в первые 4 с движения с горки проезжал расстояние, заданное формулой $S(t) = \frac{t^3}{2} + 2t$. Найдите его ускорение в момент времени $t = 3$.

293. При метании бумеранга его скорость изменялась по формуле $v(t) = 9t - t^2$ в метрах в секунду. Найдите расстояние, которое преодолел бумеранг, если он был в движении 9 секунд. (Ответ укажите в метрах.)

294. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 4t^2 - 34t + 5$ (x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеряемое с начала движения). Найдите её скорость (в м/с) в момент времени $t = 9$ с.

295. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 0{,}4t^3 - 2t^2 + t$ (x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеряемое с начала движения). Найдите её скорость (в м/с) в момент времени $t = 5$ с.

296. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -\frac{1}{5}t^5 + t^4 - t^3 + 5t$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. Найдите скорость точки (в м/с) в момент времени $t = 2$ с.

297. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2{,}5t^2 - 2t + 2$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. В какой момент времени (в секундах) скорость точки была равна 4 м/с?

298. На рисунке 227 изображена зависимость скорости некоторой материальной точки от времени. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат — скорость v в метрах в секунду. Определите, сколько раз за время движения ускорение точки обращалось в ноль (начало и конец движения не учитывайте).

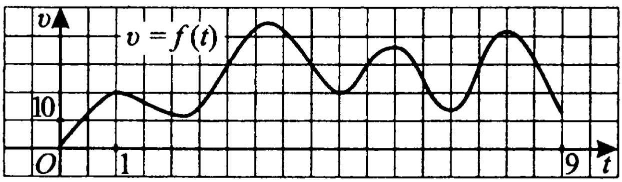


Рис. 227.

Наибольшее, наименьшее значение функции.
Монотонность функции, экстремумы

299. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{4x - 1} - x$.

300. Найдите наименьшее значение функции $y = \log_4 \dfrac{3}{x^2 + 4x + 12}$ на отрезке $[-6; 0]$.

Найдите наибольшее значение функции (301–302):

301. $f(x) = x - \log_2 x$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

302. $y = (x - 4)^2(x - 1)$ на отрезке $[1{,}5; 4{,}5]$.

Найдите наименьшее значение функции (303–304):

303. $y = \dfrac{x^5}{15} - x^3$ на отрезке $[0; 4]$.

304. $y = 2x^3 + 2x^2 - 10x + 1$ на отрезке $[-1; 2]$.

Найдите наибольшее значение функции (305–306):

305. $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 4x + 3)$ на отрезке $[0; 2]$.

306. $f(x) = 3(5x - 4)^2 - (5x - 4)^3$ при $|2x - 3| \leqslant 1$.

307. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 4(2x-3)^3 + (2x-3)^4$ при $|2x + 1| \leqslant 1$.

308. Найдите наибольшее значение функции $y = -x^3 + 3x + 5$ на отрезке $[-1; 2]$.

309. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x + 8$ на отрезке $[-3; 2]$.

310. Найдите наибольшее значение функции $y = (x + 3)e^{x+2}$ на отрезке $[-5; -3]$.

311. Найдите наибольшее значение функции $y = 5\cos x - \dfrac{24}{\pi}x + 3$ на отрезке $\left[-\dfrac{2\pi}{3}; 0\right]$.

312. Найдите наибольшее значение функции $y = 2\cos x - \dfrac{18}{\pi}x + 1$ на отрезке $\left[-\dfrac{2\pi}{3}; 0\right]$.

313. Найдите наибольшее значение функции $y = 4\operatorname{ctg} x + 4x + 3 - 2\pi$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3}{4}\pi\right]$.

314. Найдите наибольшее значение функции $y = 3x + 3\operatorname{ctg} x - 1 - \dfrac{3}{4}\pi$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

315. Найдите точку минимума функции $y = (5 - x)e^{2-x}$.

316. Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 7)e^{x-6}$ на отрезке $[1; 7]$.

317. Найдите точку максимума функции $y = (x - 8)e^{5-x}$.

318. Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 7)e^{x-8}$ на отрезке $[7; 8]$.

319. Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 12)e^{x-11}$ на отрезке $[10; 12]$.

320. Найдите наименьшее значение функции $y = (2x - 14)e^{x-6}$ на отрезке $[5; 7]$.

321. Найдите наибольшее значение функции $y = 6\cos x + 3\sqrt{3}x - \pi\sqrt{3} + 8$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

322. Найдите наибольшее значение функции $y = 4\sqrt{2}\cos x + 4x - \pi - 1$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

323. Найдите наименьшее значение функции $y = 6\cos x - 10x + 1$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

324. Найдите наименьшее значение функции $y = 5\cos x - 7x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

325. Найдите наибольшее значение функции $y = 15x - 4\sin x + 6$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

326. Найдите наименьшее значение функции $y = 2\sin x - 8x + 3$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

327. Найдите наименьшее значение функции $y = 2\sin x - 3x - 2$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

328. Найдите наибольшее значение функции $y = 2\sin x - \frac{6}{\pi}x + 1$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

329. Найдите наибольшее значение функции $y = 6\operatorname{tg} x - 2x + 3$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

330. Найдите наименьшее значение функции $y = 7\operatorname{tg} x - 2x + 5$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

331. Найдите точку минимума функции $y = (x + 4)e^{x-4}$.

332. Найдите точку минимума функции $y = (2 - x)e^{2-x}$.

333. Найдите наименьшее значение функции $y = 6x - \log_2(x + 6)^2$ на отрезке $[-5{,}5;\ 0]$.

334. Найдите наименьшее значение функции $y = 8x - \log_2(x + 3)^2$ на отрезке $[-2{,}5; 0]$.

335. Найдите наименьшее значение функции $y = 5x - 5\ln(x + 4) + 2$ на отрезке $[-3; 0]$.

336. Найдите наименьшее значение функции $y = 3x - \ln(x+2)^3$ на отрезке $[-1{,}5;\ -1]$.

337. Найдите наибольшее значение функции $y = \log_2^2 x - 4\log_2 x + 3$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

338. Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{2x} + 2^x - 2$ на отрезке $[-1; 2]$.

339. Найдите наибольшее значение функции $y = 6\ln(x+6) - 6x + 11$ на отрезке $[-5{,}5; 0]$.

340. Найдите наименьшее значение функции $y = 6 + 27x - x^3$ на отрезке $[-3; 4]$.

341. Найдите наибольшее значение функции $y = 5 + 6x - x^2$ на отрезке $[-2; 4]$.

342. Найдите точку минимума функции $y = 15x^2 - x^3$.

343. Найдите точку максимума функции $y = 15x^2 - x^3$.

344. Найдите точку максимума функции $y = (27 - x)e^{x+27}$.

345. Найдите наименьшее значение функции $y = x + \dfrac{16}{x}$ на отрезке $[1; 8]$.

346. Найдите точку максимума функции $y = x + \dfrac{16}{x}$.

347. Найдите точку максимума функции $y = -\dfrac{x}{x^2 + 169}$.

348. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{x^2 + 49}{x}$ на отрезке $[1; 7]$.

349. Найдите точку минимума функции $y = (2 - x)^2 e^{5-x}$.

350. Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 10x + 17)e^{x+2}$.

351. Найдите наибольшее значение функции $y = x^2 - 8x + 6\ln x + 19$ на отрезке $\left[\dfrac{15}{17}; \dfrac{19}{17}\right]$.

352. Найдите наименьшее значение функции $y = 3 + 24x - 2x^2 - 20\ln x$ на отрезке $\left[\dfrac{1}{7}; \dfrac{13}{7}\right]$.

353. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+5)^4 - 10x$.

354. Найдите точку минимума функции $y = 5 + \log_4(x^2 - 8x + 21)$.

355. Найдите наименьшее значение функции $y = 4x - 3\operatorname{tg} x + \dfrac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

356. Найдите наибольшее значение функции

$y = 24\sin x - 12\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}\pi + 2$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

357. Найдите наибольшее значение функции $y = (10 - x)e^{x-9}$ на отрезке $[8; 10]$.

358. Найдите наименьшее значение функции $y = (4x^2 + 24x - 24)e^x$ на отрезке $[-1; 2]$.

359. Найдите точку минимума функции $y = 2x^3 - 150x + 11$.

360. Найдите точку максимума функции $y = 17 - 2x^{\frac{3}{2}} + 9x$.

361. Найдите наибольшее значение функции $y = 5^{-3x^2+18x-24}$.

362. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{16}{x} + x$ на отрезке $[4; 8]$.

363. Найдите точку максимума функции $y = -\sqrt{x^2 - 8x + 17}$.

364. Найдите точку минимума функции $y = -\dfrac{x^2 + 361}{x}$.

365. Найдите точку минимума функции $y = (4x - 3)\sin x + 4\cos x - 4$, принадлежащую промежутку $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

366. Найдите точку максимума функции $y = 2\sin x - (2x - 7)\cos x + 7$, принадлежащую промежутку $\left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

367. Найдите наименьшее значение функции $y = 16x - \ln(8x) + 4$ на отрезке $\left[\dfrac{1}{8}; \dfrac{1}{3}\right]$.

368. Найдите наименьшее значение функции $y = 10\ln(x + 3) - 4x + 2$ на отрезке $[-2; -0{,}5]$.

1.3.4. Первообразная функции

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями (369–382):

369. $y = 24x - 9x^2$, $x = \dfrac{1}{2}$, $x = 2$, $y = 0$.

370. $y = e^x$, $x = 0$, $x = \ln\dfrac{5}{2}$, $y = 0$.

371. $y = \dfrac{1}{x} - 1$, $x = \dfrac{1}{4}$, $x = 4$, $y = 0$.

372. $y = \sin x$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{4}{3}\pi$, $y = 0$.

373. $y = x^2$, $y = x + 2$.

374. $y = -3x^2 - 3x$, $y + 9x + 9 = 0$.

375. $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x$.

376. $y = x^3 - x$, $y = 8x$.
377. $y = x^2 + |x| + 1$, $y = 3|x| + 4$.
378. $y = 3x^4 - 6x^2 + 3$, $y = 3 - 3x^2$.
379. $y = 3x(x^2 - 3x + 3)$, $y = 3x^2$.
380. $y = 3\cos 2x$, $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{\pi}{4}$ и $y = 0$.
381. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 2$ и осью ординат.
382. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$.

383. Функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x) = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = F(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = \pi$.

384. На рисунке 228 изображён график функции $y = F(x)$, где F — первообразная функции f. Найдите площадь под графиком функции f на отрезке $[-3, 2]$.

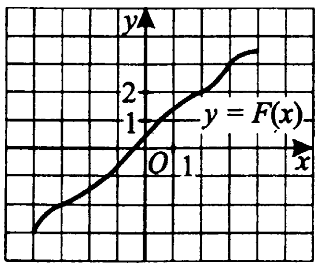


Рис. 228.

§ 2. Арифметика и алгебра

2.1. Текстовые задачи

2.1.1. Проценты, сплавы, смеси

385. Смешали 30%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным и получили 600 г 15%-го раствора. Сколько граммов 10%-го раствора было взято?

386. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 24 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску сплава, чтобы полученный новый сплав содержал 40% меди?

387. Два сосуда с раствором щёлочи разных концентраций (по объёму) содержат вместе 20 л раствора. Первый сосуд содержит 4 л щёлочи, а второй — 6 л. Сколько процентов щёлочи содержит первый сосуд, если второй содержит щёлочи на 40% меньше первого?

388. Сплав меди с цинком, содержащий 5 кг цинка, сплавили с 15 кг цинка. В результате содержание меди в сплаве понизилось по сравнению с первоначальным на 30%. Какова была первоначальная масса сплава, если известно, что она была меньше 20 кг?

389. Сплав золота с серебром, содержащий 80 г золота, сплавили со 100 г чистого золота. В результате содержание золота в сплаве повысилось по сравнению с первоначальным на 20%. Сколько серебра в сплаве?

390. Количество элементов выпускаемой продукции неудачного предприятия с момента открытия ежемесячно падало на 40% по отношению к предыдущему месяцу. В последний, пятый месяц работы предприятие выпустило 324 элемента продукции, после чего было закрыто. Сколько элементов продукции было выпущено предприятием за время своего существования?

391. Два литра 6%-ного уксуса разбавили тремя литрами 1%-ного уксуса. Каково процентное содержание уксуса в полученном растворе?

392. При распродаже летней коллекции одежды скидка составила 40%, а прибыль, получаемая магазином, снизилась до 20%. Сколько процентов прибыли от этой коллекции получал магазин до распродажи?

393. В связи с подорожанием энергоресурсов фирма по перевозке грузов планировала увеличить тарифы на свои услуги на 30%, но для сохранения прежнего объёма заказов её руководство установило тариф, который составил 90% от первоначально планируемого. На сколько процентов подорожали услуги фирмы?

394. Молокозавод планирует увеличить выпуск продукции на 10%. На сколько процентов увеличится чистая прибыль завода, если отпускная цена его продукции возросла на 15%, а её себестоимость для завода, которая до этого составляла $3/4$ отпускной цены, увеличилась на 20%.

395. В результате расширения компании сотовой связи и одновременного снижения тарифов на 50% ежемесячный объём продаж её услуг вырос в 3 раза. Через сколько месяцев дополнительная прибыль, получаемая компанией, компенсирует затраты на расширение, если они составили половину прежнего годового дохода компании?

396. Ювелирное изделие состоит из серебра и золота. В начале года серебро дорожает на 5%, а золото — на 20% по сравнению с предыдущим годом, в результате чего стоимость ювелирного изделия увеличивается на 15%. Какую часть ювелирного изделия составляет золото, если в предыдущем году 1 г золота стоил в 18 раз дороже 1 г серебра? (Ответ дать в виде десятичной дроби.)

397. В сосуде находится 10%-ный раствор спирта. Из сосуда отлили $\frac{1}{3}$ содержимого, а оставшуюся часть долили водой так, что сосуд оказался заполненным на $\frac{5}{6}$ первоначального объёма. Какое процентное содержание спирта оказалось окончательно в сосуде?

398. Бетономешалка содержит раствор цемента, состоящий из цемента, песка и воды. Из бетономешалки вылили $\frac{2}{5}$ находящегося в ней раствора цемента, а к оставшейся части добавили некоторое количество песка и некоторое количество воды так, что бетономешалка оказалась заполненной на $\frac{7}{9}$ первоначального объёма раствора. При этом раствор цемента стал содержать 27% цемента. Сколько процентов цемента изначально было в растворе?

399. В стране поставили задачу удвоения ВВП за 2 года. Сколько процентов должен составить рост ВВП за год? (Результат округлите до целого числа.)

400. В стране 10 аэропортов. С самого крупного за сутки взлетает 42 самолета, а с каждого последующего (в порядке убывания интенсивности) на 4 меньше. Сколько самолетов взлетает за сутки со всех 10 аэропортов?

401. Василий Петрович собирается взять ссуду в коммерческом банке. Определите максимальную величину суммы (в руб.), которую Василий Петрович может взять у банка под 20% годовых, если он хочет полностью расплатиться с банком в течение двух лет, выплачивая в конце каждого года не более чем 90 000 руб.

402. Мария Павловна открыла счёт в банке на сумму 20 тыс. руб. Через год после начисления банком процентов она пополнила счёт на 30 тыс. руб. А ещё через год сумма на её счёте составила 60 950 руб. Определите, сколько процентов годовых выплачивает банк по виду вклада, открытого Марией Павловной.

403. Технологический процесс обогащения руды состоит из трёх этапов, на каждом из которых происходит уменьшение доли примесей в руде на определённое число процентов по отношению к предыдущему этапу. На первом этапе доля примесей уменьшается на 20%, на втором этапе — на 15%, на третьем этапе — на 10%. На сколько процентов уменьшается доля примесей в руде после завершения этого процесса?

404. Расценки на грузоперевозки по железной дороге увеличивались за год дважды: на 20% в первый раз, и на 10% — во второй. Определите, на сколько процентов возрастут расходы почтовой фирмы на железнодорожный транспорт, если объём перевозимой ею по железной дороге почты вырос на 30%.

405. При консервировании фруктов банок с абрикосовым компотом было закупорено на 10% больше, чем банок с вишнёвым компотом. Причем с вишнёвым компотом трёхлитровых банок было закупорено на 25% больше, а литровых — на 15% меньше, чем с абрикосовым компотом. Сколько процентов составляют трёхлитровые банки с абрикосовым компотом от всех закупоренных с этим компотом банок? (Ответ округлите до целого числа.)

406. В начале учебного года издательство выпустило на 20% книг по математике больше, чем книг по физике. Причём по физике книг для девятого класса было выпущено на 10% больше, а для одиннадцатого класса — на 25% меньше, чем книг по математике. Сколько процентов составляют книги по физике для девятого класса от всех книг, выпущенных по физике? (Ответ округлите до целого числа.)

407. Имеются два сплава, в первом из которых содержится 40%, а во втором — 20% серебра. Сколько килограммов второго сплава необходимо добавить к 20 кг первого сплава, чтобы получить сплав, содержащий 30% серебра?

408. Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Соединив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Сколько килограммов олова содержится в получившемся сплаве?

409. Имеются два раствора цемента, состоящих из воды, песка и цемента. Известно, что первый раствор содержит 10% воды, а второй — 40% цемента. Процентное содержание песка в первом растворе в два раза больше, чем во втором. Смешав 300 кг первого раствора и 400 кг второго раствора, получили новый раствор, в котором оказалось 30% песка. Сколько килограммов цемента содержится в получившемся растворе?

410. В первой канистре находится пятипроцентный раствор соли, а во второй канистре — десятипроцентный. В пустое ведро выливают половину раствора из каждой канистры. В результате ведро содержит семипроцентный раствор. Во сколько раз масса раствора в первой канистре больше массы раствора во второй?

411. В первой колбе находится однопроцентный раствор уксуса, а во второй колбе — пятипроцентный. В третью колбу выливают половину раствора из каждой колбы. В результате колба содержит двухпроцентный раствор. Во сколько раз масса раствора в первой колбе больше массы раствора во второй?

412. Фирма «Абрикос» занимается производством сока. В новом году фирма решила выпускать сок в новой, более качественной упаковке, которая на 15% дороже предыдущей. В результате стоимость сока увеличится на 5%. Сколько процентов от общей стоимости пакета сока первоначально составляла стоимость упаковки? (Ответ округлите до целого числа.)

413. Хозяин магазина музыкальных инструментов распорядился заменить у гитар струны из нейлона на металлические, которые на 50% дороже струн из нейлона. В результате стоимость каждой из этих гитар возросла на 1%. Сколько процентов от стоимости всей гитары составляла стоимость струн из нейлона?

414. Руда содержит 40% примесей, а выплавленный из неё металл содержит 4% примесей. Сколько тонн руды необходимо взять, чтобы выплавить из неё 15 тонн металла?

415. Сплавляя два одинаковых по весу куска чугуна с разным содержанием хрома, получили сплав, в котором содержится 12 кг хрома. Найдите процентное содержание хрома в полученном сплаве, если известно, что содержание хрома в первом куске чугуна было на 5% меньше, чем во втором, и что если бы первый кусок был в два раза тяжелее, то в сплаве оказалось бы 16 кг хрома.

416. Сплавляя два одинаковых по весу слитка, состоящих только из золота и серебра, с разным содержанием золота, получили сплав, в котором содержится 3 кг золота. Если бы второй слиток был в два раза тяжелее, то в сплаве содержалось бы 11 кг серебра. Известно, что процентное содержание золота в первом слитке было на 20% больше, чем во втором. Сколько килограммов серебра содержится в полученном сплаве?

417. Имеется два раствора кислоты. Первый раствор состоит из 1056 г кислоты и 44 г воды, а второй — из 756 г кислоты и 1344 г воды. Из этих растворов нужно получить 1500 г нового раствора, содержание кислоты в котором 40%. Сколько граммов первого раствора нужно для этого взять?

418. Имеется два достаточно больших слитка сплава золота с медью. Первый слиток содержит 92% золота, а второй — 80% золота. Из этих слитков надо получить 600 г сплава, содержание золота в котором 85%. Определите массу куска, который для этого необходимо взять от первого слитка.

419. Салон модной одежды выставил на продажу новую коллекцию, сделав наценку 80% от закупочной цены. После продажи 0,75 всей коллекции салон распродал оставшуюся часть коллекции со скидкой 60% от продажной цены. Сколько процентов от закупочной цены коллекции составила прибыль салона?

420. Салон модной одежды выставил на продажу новую коллекцию, сделав наценку 140% от закупочной цены. После продажи 0,85 всей коллекции салон распродал оставшуюся часть с одинаковой скидкой от продажной цены (в процентном отношении) на все элементы коллекции. Сколько процентов составила эта скидка, если прибыль салона от продажи всей коллекции составила 113% от закупочной цены?

421. Антикварный магазин, купив портсигар и статуэтку, продал их, получив 40% прибыли. Во сколько раз портсигар обошёлся дороже магазину, чем статуэтка, если на портсигаре было получено 35% прибыли, а на статуэтке — 60%?

422. Кондитерская фабрика производит 20 видов шоколада. В новом году 5 из этих видов будут производить на 10% больше, а другие 7 видов — на 20% больше. На сколько процентов увеличится выпуск шоколада на фабрике, если в старом году все виды шоколада производились в одинаковом количестве?

423. За два года количество безработных в регионе снизилось на 60%. На сколько процентов снизилась безработица за первый год, если во второй год снижение было в два с половиной раза больше, чем в предыдущем (в процентном отношении)?

424. После двух последовательных повышений размер пенсии был увеличен на 56%. На сколько процентов повысили пенсию в первый раз, если второе повышение было в полтора раза больше первого (в процентном отношении)?

425. В сосуде было 20 литров кислоты. Часть кислоты отлили и сосуд дополнили таким же количеством воды. Затем снова отлили такое же количество смеси и дополнили сосуд таким же количеством воды. Сколько литров воды доливали каждый раз, если в результате в сосуде оказался 36%-ный раствор кислоты?

426. В сосуде было 10 литров масла. Часть масла отлили и сосуд дополнили таким же количеством воды. Затем снова отлили такое же количество смеси и дополнили сосуд таким же количеством воды. Сколько литров воды доливали каждый раз, если в результате в сосуде оказался 81%-ный раствор?

427. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо добавить к этому куску сплава, чтобы получившийся сплав содержал 40% меди?

428. В течение третьего квартала стоимость некоторого пакета акций изменялась следующим образом: 15 августа стоимость пакета акций была на 25% выше, чем его стоимость 1 июля, а среднее арифметическое его стоимости 30 сентября и 1 июля равнялось его стоимости 15 августа. На сколько процентов подорожал пакет акций за период с 15 августа по 30 сентября?

429. Магазин выставил на продажу товар с наценкой 45% от закупочной цены. После продажи 0,6 всего товара магазин снизил назначенную цену на 40% и распродал оставшийся товар. Сколько процентов от закупочной цены товара составила прибыль магазина?

430. После проведения санитарной обработки полей количество колорадского жука уменьшилось на 40%, а количество капустницы — на 20%. В целом количество насекомых уменьшилось на 25%. Сколько процентов от общего числа насекомых составляла капустница до санитарной обработки?

431. Население города за 2 года увеличилось с 20 000 до 22 050 человек. Найдите средний ежегодный процент роста населения этого города.

432. Сплав меди и цинка массой 12,5 кг содержит 40% меди. Сколько килограммов меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал меди и цинка поровну?

433. К раствору соляной кислоты добавили 100 г соляной кислоты. В результате получили 600 г 18%-ного раствора соляной кислоты. Сколько граммов соляной кислоты содержалось в исходном растворе?

434. Скорость скачивания файла с сайта 0,25 Мб/сек. Сколько процентов файла величиной 75 Мб скачается с сайта за 2 минуты?

435. Файл 1,5 Мб скачивается с сайта за 27 секунд. За сколько минут скачается файл величиной 80 Мб, если скорость скачивания увеличится на 20%?

436. Тетя Маша пошла на продуктовый рынок и купила там 1 кг черешни, после чего заметила в продаже ещё черешню стоимостью 90 рублей за кг, что было на 10% дешевле той, что она уже купила, и взяла ещё 1 кг этих ягод. Не меньше какой суммы в рублях было у тети Маши с собой изначально?

437. Есть два раствора щёлочи суммарным объёмом 19 литров. Первый раствор содержит 5 литров щёлочи, второй — 2 литра. Найдите объём в литрах первого раствора, если процентное содержание щёлочи в нём в 1,5 раза меньше, чем во втором.

438. Эльдар на день рождения Эльвире купил флеш-карту объёмом 16 Гб за 1200 рублей, после чего увидел флеш-карту объёмом 32 Гб. И хотя она стоила на 60% дороже уже купленной, Эльдар взял в подарок её, решив флеш-карту меньшей ёмкости оставить себе. Не меньше какой суммы в рублях было у Эльдара с собой изначально?

439. Есть два куска сплава металлов. Масса олова в первом 5 кг, во втором — 7 кг. Найдите массу второго сплава, если процентное содержание олова в нём в 3 раза больше, чем в первом, и если суммарный вес обоих кусков сплава равен 44 кг.

440. Из 30 центнеров муки 40% было продано оптом, а остальное расфасовано в пакеты по 2 кг. В один ящик вмещается 40 пакетов. Сколько ящиков потребуется, чтобы разместить пакеты с мукой?

441. Стоимость комплекта учебников по математике составляет 420 руб. Какое максимальное количество комплектов по математике может приобрести библиотека на 5000 руб, если комплект подорожает на 15%?

442. Стоимость 20 мячей до уценки составляла 900 руб. Какое максимальное количество мячей можно приобрести на ту же сумму после их уценки на 10%?

443. В маршрутном такси 20 посадочных мест. Какое минимальное количество такси потребуется для того, чтобы перевезти 87 учащихся от школы до Дворца спорта, если каждое такси будет заполнено школьниками на 90%?

444. Операционист банка обслуживает за день в среднем 30 человек. Какой процент клиентов от общего числа обслуживаемых в день операционист может обслужить за 2 часа работы, если одному клиенту он уделяет 10 минут?

445. В ящике с шоколадками $\frac{2}{3}$ шоколадок содержат орехи, а $\frac{5}{6}$ — изюм. Сколько процентов шоколадок содержат и орехи, и изюм, если каждая шоколадка содержит хотя бы одну из добавок?

446. В группе студентов $\frac{3}{5}$ владеют английским языком, а $\frac{7}{10}$ — немецким. Сколько процентов студентов владеют обоими языками, если каждый студент владеет хотя бы одним из этих языков?

447. Поздравительная открытка стоит 20 рублей. Какое максимальное число открыток можно будет купить на 200 рублей после повышения цены на 25%?

448. Метр сетевого кабеля стоит 10 рублей. Какое максимальное количество метров кабеля можно будет купить на 300 рублей, если цена на него упадёт на 10%? (Кабель продают только целым количеством метров.)

449. Тракторист за день вспахивает 8 га пашни. Сколько дней понадобится трактористу, чтобы вспахать поле площадью 120 га, если его производительность увеличится на 25%?

450. Пирожок в школьном буфете стоит 12 рублей. Какое максимальное число пирожков можно будет купить на 50 рублей после снижения цены пирожка на 25%?

451. Набор карандашей стоит 30 рублей. Какое наибольшее число таких наборов можно будет купить на 360 рублей после повышения цены на 10%?

452. Калькулятор стоит 100 рублей. Какое наибольшее число таких калькуляторов можно будет купить на 500 рублей после понижения их цены на 20%?

453. Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 120 рублей за штуку. Торговая наценка составляет 20%. Какое наибольшее число таких горшков можно купить в этом магазине на 1400 рублей?

454. Тетрадь стоит 50 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 570 рублей после понижения цены на 10%?

455. Мобильный телефон стоил 6650 рублей, а после снижения цены стал стоить 5852 рубля. На сколько процентов была снижена цена?

456. Во фруктовом отделе магазина находится 1000 фруктов, причём 76% из них не цитрусовые. Известно, что 65% цитрусовых составляют не апельсины. Сколько апельсинов в отделе?

457. Клиент взял в банке кредит 100 000 рублей на год под 14% годовых. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, чтобы через год выплатить всю сумму вместе с процентами. Сколько рублей должен клиент вносить в банк ежемесячно?

458. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы работник получил 13 485 рублей. Сколько составляет его заработная плата? (Ответ дайте в рублях.)

459. Стаканчик сырых семечек стоит 5 рублей, а жареных — на 60% больше. Сколько стаканов жареных семечек можно купить на 100 рублей?

460. Поставщик привозит в магазин пирожные, а в магазине после наценки 40% от стоимости их продают по цене 21 рубль. Сколько пирожных можно купить у поставщика на 70 рублей?

461. Цена одного литра кефира была повышена на 15% и составила 32 рубля 20 копеек. Сколько рублей стоил литр кефира до повышения цены?

462. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата программиста составила 35 тысяч рублей. Сколько рублей он получит после вычета налога на доходы?

463. Штучный товар стоит 180 руб. Какое количество этого товара можно будет купить на 1000 рублей после повышения цены на 15%?

464. Положив в банк 2000 рублей, вкладчик получил через два года 4380 рублей 80 копеек. Какой процент начислял банк ежегодно?

465. Билет в театр стоит 500 руб. Какое максимальное количество билетов можно купить на 5000 рублей после повышения цены билета на 15%?

466. Положив в банк 1500 рублей, вкладчик получил 1949,4 рублей через два года. Какой процент начислял банк ежегодно?

467. Банк дважды в течение года повышал процентную ставку по кредиту на 12%. Найдите, на сколько процентов повысился платёж за кредит по истечении года. (Знак % не писать.)

468. Одна книга из серии «От Кантемира до Кушнера» стоит 180 рублей. Какое наибольшее количество книг этой серии можно купить на 1050 рублей, если скидка составляет 25%?

469. Одна поездка в маршрутном такси стоит 20 рублей. Какое наибольшее число поездок можно будет совершить на 1600 рублей после повышения цены проезда на 30%?

470. 8 выпускников школы собираются продолжить обучение в вузах других городов. Они составляют 5% от числа выпускников. Сколько в школе выпускников?

471. В сосуд, содержащий 6 литров 15%-го водного раствора некоторого вещества, добавили 4 л воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

472. Цена телевизора составляет 40 000 руб. Ежемесячно торговая компания уменьшает цену на одно и то же количество процентов от предыдущей цены. Найдите, на сколько процентов уменьшалась цена телевизора каждый месяц, если через 2 месяца телевизор купили за 35 344 руб.

473. В городе R живёт 200 000 жителей. Среди них 10% детей и подростков. Среди взрослых 50% не работает (пенсионеры, студенты и т. п.). Сколько взрослых жителей в городе R работает?

474. Стоимость одной поездки в автобусе была повышена на 28% и составила 16 рублей. Сколько рублей стоила одна поездка до повышения цены?

475. Видеокарта стоит 2400 рублей. После снижения цены она стала стоить 1632 рубля. На сколько процентов была снижена цена на видеокарту?

476. Магазин покупает средство от комаров по 120 рублей за флакон и продаёт с наценкой 35%. Какое наибольшее число флаконов можно купить в этом магазине на 900 рублей?

477. При оплате услуг через платёжный терминал взимается комиссия в размере 7%. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям. Студентка L хочет положить на счёт своего мобильного телефона не менее 220 рублей. Какую минимальную сумму (в рублях) она должна положить в приёмное устройство данного терминала?

478. Анна, Мария, Людмила и Александра учредили компанию с уставным капиталом 240 000 рублей. Анна внесла 15% уставного капитала, Мария — 43 200 рублей, Людмила — 0,25 уставного капитала, а оставшуюся часть внесла Александра. Учредители договорились, что полученную прибыль они будут делить пропорционально внесённому вкладу. Найдите сумму (в рублях), причитающуюся Александре, если годовая прибыль компании составила 820 000 рублей.

2.1.2. Движение

479. Автотурист проехал на автомобиле в первый день 720 км. В каждый следующий день он проезжал на 40 км меньше. Сколько дней путешествовал автотурист, если за всё время путешествия он проехал 5040 км?

480. Мотоциклист предполагал проехать расстояние 90 км за определённое время. Проехав 54 км, он должен был остановиться у закрытого шлагбаума на 5 мин. Продолжив движение, он увеличил скорость на 6 км/ч и прибыл к месту назначения в намеченное время. Найдите первоначальную скорость мотоциклиста.

481. Два автомобиля выезжают одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу по одной и той же дороге. Первый автомобиль прибывает в пункт B через 15 часов после выезда, а второй прибывает в пункт A через 4 часа после их встречи. Сколько времени прошло от момента выезда автомобилей до момента их встречи, если оба автомобиля двигались с постоянной скоростью?

482. Из пункта A в пункт B выезжает велосипедист и прибывает в пункт B через 45 минут. Одновременно с ним, по той же самой дороге, из пункта B в пункт A выходит пешеход. Пешеход прибывает в пункт A через 1 час после встречи с велосипедистом. Считая, что велосипедист и пешеход двигались с постоянной скоростью, определите, сколько минут прошло от начала движения велосипедиста и пешехода до момента их встречи.

483. Спортсмен, стартуя с одного конца бассейна, доплывает до другого конца бассейна, поворачивает и плывёт обратно. В тот момент, когда он поворачивает, по соседней дорожке навстречу ему выплывает другой спортсмен, который проплывает расстояние от одного до другого конца бассейна за 36 секунд. Первый спортсмен вернулся к месту своего старта через 25 секунд после того, как поравнялся со спортсменом, плывшим ему навстречу. Предполагая, что скорость спортсменов всё время была постоянной, определите, через сколько минут после начала своего заплыва первый спортсмен вернулся к месту старта.

484. Катер прошёл 10 км против течения реки, а затем 45 км по течению, затратив на весь путь 2 ч. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки 5 км/ч.

485. Ученик идёт в школу со скоростью 5 км/ч. За минуту до звонка он спохватывается и бежит весь оставшийся путь со скоростью 20 км/ч. В результате он опаздывает на урок всего на одну минуту. За сколько секунд до звонка должен был спохватиться школьник, чтобы успеть вовремя?

486. Студент идёт в университет со скоростью 2 км/ч, за пять минут до начала занятий он прибавляет шагу и оставшийся путь проходит со скоростью 6 км/ч. В результате студент опаздывает на 20 минут. За какое минимальное время (в минутах) до начала занятий ему нужно было прибавить шагу, чтобы опоздать не больше, чем на 15 минут?

487. Пешеход идёт вдоль дороги. Мимо него проезжают попутные автобусы с интервалом 10 минут. С каким интервалом (в минутах) автобусы проезжают мимо остановки, если скорость автобуса в десять раз больше скорости пешехода?

488. Моторная лодка прошла против течения реки 16 км и возвратилась назад, затратив на обратный путь на 40 минут меньше, чем на путь против течения. Скорость течения реки 2 км/ч. Во сколько раз скорость лодки в стоячей воде больше скорости течения реки?

489. Теплоход отошел от пристани одновременно с плотом и прошел вниз по реке 42 км. Сделав остановку на 1 час, он двинулся обратно вверх по реке. Пройдя 12 км, он встретился с плотом. Во сколько раз собственная скорость теплохода больше скорости течения реки, если скорость течения реки равна 4 км/ч?

490. Теплоход проходит от пристани A до пристани B по течению реки за 3 ч, а против течения — за 4 ч. За сколько часов проплывёт это расстояние плот?

491. Маша собирает ведро малины за 3 часа, а Саша — за 5 часов. За сколько часов они наберут 2 ведра малины, если будут собирать ягоды вместе с постоянной скоростью?

492. Расстояние между двумя городами 180 км. Рейсовый автобус проходит это расстояние на 27 минут медленнее маршрутного такси. Если скорость автобуса увеличить на 10 км/ч, а маршрутного такси уменьшить на 10 км/ч, то они будут проходить это расстояние за равное время. Определите первоначальную скорость автобуса.

493. Два велосипедиста стартовали одновременно и движутся в одном направлении с постоянной скоростью по трассе. В момент старта второй велосипедист находился перед первым на расстоянии 146 м. Первый велосипедист догнал второго через 1 минуту, пройдя расстояние, равное $\frac{1}{120}$ от общей протяжённости дистанции, и финишировал на 30 минут раньше второго. Определите скорость первого велосипедиста (в км/ч).

494. Из A в B одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 30 км/ч, а вторую половину пути со скоростью на 20 км/ч большей скорости первого. В результате они прибыли в пункт B одновременно. Найдите скорость первого автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

495. Прогулочный катер вышел в 14:00 из пункта A в пункт B, расположенный в 20 км от пункта A. Пробыв 15 минут в пункте B, катер отправился назад и вернулся в пункт A в 18:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что скорость катера равна 12 км/ч.

496. Моторная лодка в 9:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 14 км от пункта A. Пробыв 1 час 20 минут в пункте B, лодка отправилась назад и вернулась в пункт A в 17:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость лодки равна 5 км/ч.

497. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 30 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на один час позже мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

498. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 50 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 60 км больше, чем велосипедист. Определите скорость мотоциклиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 2 часа 40 минут раньше велосипедиста. Ответ дайте в км/ч.

499. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 60 км, выехал с постоянной скоростью велосипедист, а через полчаса после него со скоростью на 10 км/ч большей выехал второй велосипедист. Найдите скорость первого велосипедиста, если в пункт B он прибыл на 30 минут позже второго. Ответ дайте в км/ч.

500. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист со скоростью 20 км/ч, а через час — еще один со скоростью 30 км/ч. Найдите расстояние от A до B, если велосипедисты приехали в пункт B в одно и то же время. Ответ дайте в км.

501. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 40 км, выехал велосипедист со скоростью 40 км/ч. Когда он проехал ровно половину пути от A до B, следом за ним выехал мотоциклист, который догнал велосипедиста за 10 км до пункта B. Найдите скорость сближения между велосипедистом и мотоциклистом. Ответ дайте в км/ч.

502. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два мотоциклиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 50 км/ч, а вторую половину пути со скоростью, на 15 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым мотоциклистом. Найдите скорость первого мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

503. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 108 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 3 км/ч больше прежней. В пути он сделал остановку на 3 часа и в результате затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

504. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 120 км. На следующий день он отправился обратно в A со скоростью на 2 км/ч меньше прежней, в результате чего велосипедист затратил на обратный путь на два часа больше, чем на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

505. Два велосипедиста одновременно отправились в пробег протяжённостью 84 километра. Первый ехал со скоростью, на 5 км/ч большей скорости второго, и прибыл к финишу на 5 часов раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

506. Моторная лодка прошла против течения реки 144 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 3 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

507. Моторная лодка прошла по течению реки 140 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 3 часа больше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 17 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

508. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 221 км и сразу возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч и на путь против течения реки теплоход затратил на 4 часа больше, чем на путь по течению реки. Ответ дайте в км/ч.

509. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 315 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 18 км/ч, стоянка длится 4 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 40 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

510. На озере от пристани A к пристани B отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 3 часа после этого следом за ним со скоростью, на 3 км/ч большей, отправился второй. Расстояние между пристанями равно 418 км. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт B оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

511. От пристани A к пристани B отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 2 часа после этого следом за ним со скоростью, на 2 км/ч большей, отправился второй. Расстояние между пристанями равно 255 км. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт B он прибыл одновременно со вторым. Ответ дайте в км/ч.

512. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 156 км, одновременно выехали автомобилист и мотоциклист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 25 км больше, чем мотоциклист. Определите скорость мотоциклиста, если известно, что он прибыл в пункт B на $1,5$ часа позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

513. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 90 км, одновременно выехали велосипедист и мотоциклист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если он прибыл в пункт B на 3 часа позже мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

514. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два мотоциклиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 30 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью на 20 км/ч больше скорости первого. В результате они прибыли в пункт B одновременно. Найдите скорость второго мотоциклиста на второй половине пути.

515. Первые 432 км автомобиль ехал по шоссе со скоростью 72 км/ч, следующие 150 км — со скоростью 75 км/ч, а затем 66 км проехал за 1 час. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

516. Теплоход проходит расстояние в 180 км по течению реки, после стоянки 2 часа возвращается в пункт отправления через 26 часов после начала движения. Найдите скорость теплохода (в км/час) в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/час.

517. Из двух городов, расстояние между которыми 720 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 70 км/час и 80 км/час?

518. Экскурсионный теплоход проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Найдите собственную скорость теплохода (в км/ч), если он прошёл 120 км, скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длилась 2 часа, а в пункт отплытия он вернулся через 10 часов.

519. Из одного города в другой, расстояние между которыми 105 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Определите скорость мотоциклиста, если известно, что он проезжает в час на 20 км больше, чем велосипедист, и в другой город он прибыл на 4 часа раньше. Ответ дайте в км/ч.

520. Путь в $158\frac{2}{3}$ км велосипедист преодолевает на 2 часа быстрее, чем пешеход. Какова скорость велосипедиста, если известно, что он в час проезжает на 3 км больше, чем проходит пешеход? Ответ укажите в км/ч.

521. Экскурсионный теплоход регулярно перемещается из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 570 км. Теплоход отправился с постоянной скоростью из A в B. После прибытия он отправился обратно со скоростью на 8 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на отдых на 4 часа. В результате теплоход затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь от A до B. Найдите скорость теплохода на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

522. Первые два часа автомобиль двигался со скоростью 65 км/ч, следующий час — со скоростью 80 км/ч, а затем три часа — со скоростью 70 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

523. Из одной точки круговой трассы, длина которой 15 км, одновременно в одном направлении стартовали два мотоциклиста. Первый мотоциклист двигался со скоростью 60 км/ч и через 45 минут после старта опережал второго мотоциклиста на один круг. Найдите скорость (в км/ч) второго мотоциклиста.

524. Катер прошёл против течения реки 120 км и вернулся в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше. Найдите скорость катера в неподвижной воде (в км/ч), если скорость течения реки 4 км/ч.

525. Теплоход проходит по течению реки расстояние 126 км от одного пункта до другого с постоянной скоростью. Сделав стоянку на 3 часа, теплоход возвратился в пункт отправления, затратив на всю прогулку 19 часов. Найдите скорость течения (в км/ч), если собственная скорость теплохода 16 км/ч.

526. Первые 150 км автомобиль двигался со скоростью 60 км/ч, следующие 210 км — со скоростью 70 км/ч, а затем 150 км — со скоростью 75 км/ч. Найдите среднюю скорость (в км/ч) автомобиля на протяжении всего пути.

527. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 90 км/ч, проезжает мимо семафора за 18 с. Найдите длину поезда (в м).

528. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 150 км, одновременно выехали автомобилист и мотоциклист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 15 км больше, чем мотоциклист. Найдите скорость мотоциклиста (в км/ч), если известно, что он прибыл в пункт B на 2 ч 15 мин позже автомобилиста.

529. Электропоезд, двигаясь равномерно со скоростью 63 км/ч, проезжает мимо платформы, длина которой 600 м, за 1 мин и 2 с. Найдите длину электропоезда (в м).

530. По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 80 км/ч и 50 км/ч. Длина товарного поезда равна 1100 метрам. Найдите длину пассажирского поезда (в м), если время, за которое он прошёл мимо товарного поезда, равно 3 мин 6 с.

531. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми 120 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 2 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 2 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста (в км/ч) на пути из A в B.

532. Расстояние между городами A и B составляет 641 км. Из A в B выехал автомобиль со скоростью 75 км/ч, через 4 часа навстречу ему из города B выехал со скоростью 80 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города A (в км) автомобили поравняются?

2.1.3. Работа, производительность

533. Для разгрузки баржи имеется три крана. Первому крану для разгрузки всей баржи требуется времени в четыре раза меньше, чем второму, и на 9 ч больше, чем третьему. Три крана, работая вместе, разгрузили бы баржу за 18 ч, но по условиям эксплуатации одновременно могут работать только два крана. Определите наименьшее время (в часах), необходимое для разгрузки баржи. (Производительность каждого крана постоянна в течение всей работы.)

534. Обычно к выполнению некоторого задания привлекаются одновременно два механизма. Производительности этих механизмов неодинаковы, и при совместном действии задание выполняется ими за 30 ч. Однажды совместная работа двух механизмов продолжалась только 6 ч, после чего один из них вышел из строя, и всю остальную часть задания выполнил второй механизм за 40 ч. За какое время (в часах) выполнил бы всё задание механизм, который вышел из строя, работая самостоятельно с присущей ему производительностью? (Производительность каждого механизма постоянна в течение всей работы.)

535. Два механических крота разной мощности при одновременной работе с разных концов тоннеля могли бы прорыть его за 27 дней. Эти два крота начали одновременно рыть данный тоннель с разных концов, при этом после того как первый прорыл $\frac{1}{3}$ длины тоннеля, второй сломался. Оставшуюся часть тоннеля первый крот прорыл самостоятельно за 8 дней. За сколько дней прорыл бы весь тоннель первый крот, работая самостоятельно? (Производительность каждого крота постоянна в течение всей работы.)

536. Рабочий за первый день выполнил 18% от всей порученной ему работы. В каждый следующий день он увеличивал производительность на 1%. За сколько дней рабочий выполнит всю работу.

537. Компьютер решает последовательно несколько задач. На решение каждой следующей задачи компьютер тратит на 0,2 с меньше времени, чем на решение предыдущей. Сколько было предложено задач компьютеру, если первая из них была решена за 1,8 с, а решение всех задач, кроме последней, заняло 7,8 с?

538. Для подготовки в серьёзный вуз школьник решал в течение 30 дней задачи. Для достижения прогресса он ежедневно увеличивал количество рассматриваемых им задач на одно и то же число. После подготовки школьник посчитал, что общее количество рассмотренных им задач за первые двадцать дней равно количеству задач, рассмотренных за последние десять дней. Во сколько раз больше он рассмотрел задач за последние пятнадцать дней по сравнению с первыми пятнадцатью днями?

539. В крупном лесхозе к новогодним праздникам производили вырубку сосен для поставки их в города. Каждый последующий день количество вырубленных сосен увеличивалось на 200% по сравнению с предыдущим днём. Сколько дней продолжалась вырубка сосен, если во второй день вырубки вырубили 12 сосен, а в последний день — 2916 сосен?

540. Опытный рабочий изготавливает 40 деталей на 2 часа быстрее, чем молодой рабочий изготавливает 30 деталей. За сколько часов оба этих рабочих изготовят вместе 120 деталей, если за 1 час опытный рабочий изготавливает на 5 деталей больше молодого рабочего?

541. Автоматизированная мойка машин обслуживает 20 автомобилей на 5 часов быстрее, чем ручная мойка обслуживает 45 автомобилей. За сколько часов ручная мойка обслужит 105 автомобилей, если автоматизированная мойка обслуживает за 1 час на 7 автомобилей больше, чем ручная?

542. Бригада рабочих за несколько дней должна была изготовить 360 деталей, работая с постоянной производительностью. Изготавливая ежедневно на 4 детали больше, чем предполагалось по плану, бригада выполнила задание на 1 день раньше срока. Сколько дней затратила бригада на выполнение задания?

543. Ученик, выполняя домашнее задание по математике, решил первую задачу за 1 ч. На решение каждой следующей задачи он тратил на 6 мин. меньше, чем на предыдущую. Оказалось, что на выполнение всего домашнего задания по математике школьник потратил 5 ч 24 мин. Сколько задач было задано ученику?

544. Бассейн заполняется водой за 6 часов с помощью трёх насосов, работающих вместе. Производительности первого и второго насосов относятся как 3 : 5, причём первый и второй насосы, работая вместе, заполняют бассейн в 4 раза быстрее, чем третий насос, работая один. На сколько процентов будет заполнен бассейн за 3 часа 36 минут совместной работы первого и третьего насосов?

545. Цистерна заполняется бензином за 5 часов с помощью трёх насосов, работающих вместе. Производительности второго и третьего насосов относятся как 2 : 3, причём первый насос, работая в одиночку, заполняет цистерну в 3 раза медленнее, чем второй и третий насосы, работая вместе. На сколько процентов окажется заполнена цистерна, если 6 часов она будет заполняться первым насосом, а потом ещё 5 часов — вторым?

546. В цехе есть новые и старые станки. Производительности старого и нового станков относятся как 2 : 9. Заказ можно выполнить с помощью пяти старых и двух новых станков за определённое время. Сколько процентов заказа можно выполнить за это же время с помощью шести старых и одного нового станка?

547. Из трёх насосов бассейн заполняется за 5 часов. Производительности насосов относятся как 3 : 4 : 5. Сколько часов заполнялся бассейн, если сначала работал только первый насос, через час включились второй и третий, а ещё через час первый насос сломался?

548. Два каменщика могут выложить стену за 6 часов. Через три часа после начала работы второй каменщик получил травму и ушел, после чего первый закончил работу за 4 часа. Сколько часов потребовалось бы для того, чтобы выложить стену, второму каменщику, если бы он не получил травму и работал один?

549. Первый автопогрузчик работает вдвое быстрее второго, а вместе они загружают вагон за 10 часов. Известно, что сначала работал только первый, а потом они работали вместе, в результате чего вся погрузка заняла 11 часов. Сколько часов работал только первый автопогрузчик?

550. В фирме «Рога и копыта» работают два менеджера. За 4 дня работы они продали $\frac{3}{5}$ от всего товара, находящегося на складе, при этом объёмы их продаж соотносятся как 4 : 5. Затем один из них заболел, а второй ушёл в отпуск, и вместо них начал работать новый сотрудник. Скорость работы нового сотрудника в два раза ниже скорости работы первого менеджера. Когда первый менеджер выздоровел (а второй ещё был в отпуске), на складе осталось 20% товара от первоначального объёма. Определите, сколько дней болел первый менеджер.

551. Доставка грузов на МКС осуществляется ракетой «Протон». Рейс в одну сторону на основном двигателе занимает 10 часов. В одном из рейсов был использован дополнительный двигатель в течение 2 часов, при этом время полета составило 8 часов. Найдите отношение мощности основного двигателя к мощности дополнительного двигателя, если считать, что скорость ракеты прямо пропорциональна мощности её двигателей, а при одновременной работе двух двигателей их мощности суммируются.

552. Два насоса, работая одновременно, могут откачать воду из бассейна за 3 часа 45 минут. Если сначала откачать половину воды одним насосом, а потом оставшуюся половину другим насосом, то на это уйдёт 8 часов. За сколько минут можно откачать воду тем насосом, который работает быстрее?

553. Первый насос перекачивает 45 м^3 воды на 30 минут быстрее, чем второй 50 м^3. Сколько воды (в м^3) ежечасно перекачивает первый насос, если он перекачивает за час на 5 м^3 воды больше, чем второй?

554. Две бригады, работая вместе, вспахали поле за 4 часа. За сколько часов может вспахать поле первая бригада, работая самостоятельно, если ей необходимо на 6 часов меньше, чем второй бригаде?

555. Два садовника вместе стригут кусты за 5 часов. Если бы первый садовник подстригал кусты один 3 часа, то второму понадобилось бы 7,5 часов, чтобы доделать работу до конца. За сколько часов второй садовник может один подстричь все кусты?

556. Два комбайна могут вспахать поле за 15 часов. Если бы первый комбайн работал 7 часов один, то второму надо было бы работать 21 час, чтобы доделать работу до конца. За сколько часов первый комбайн вспашет всё поле?

557. Три трактора, работая вместе, могут вспахать поле за 4 часа. Это же поле первый и второй тракторы могут вспахать за 6 часов. За сколько часов это поле может вспахать третий трактор, работая самостоятельно?

558. В фермерском хозяйстве имеется три комбайна. Первый и второй комбайны могут убрать пшеничное поле за 4 часа, второй и третий комбайны могут убрать это поле за 6 часов, первый и третий комбайны — за 12 часов. За сколько часов уберут это поле три комбайна, работая вместе?

559. Заказ на 99 деталей первый рабочий выполняет на 2 часа медленнее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что он за час делает на 2 детали больше, чем первый?

560. Заказ на 360 деталей первый рабочий выполняет на два часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на две детали больше?

561. На изготовление 126 деталей мастер затрачивает на два часа меньше, чем ученик на изготовление 143 таких же деталей. Известно, что мастер за час делает на одну деталь больше, чем ученик. Сколько деталей в час делает ученик?

562. На шлифовку 264 деталей мастер затрачивает на четыре часа меньше, чем ученик на шлифовку 256 таких же деталей. Известно, что мастер за час шлифует на шесть деталей больше, чем ученик. Сколько деталей в час шлифует мастер?

563. Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 675 литров она заполняет на 2 минуты быстрее, чем первая труба?

564. Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 336 литров она заполняет на минуту дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объёмом 375 литров?

565. Заказ на 189 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 4 детали больше?

566. Двое рабочих должны выполнить заказ за 12 часов. Через 6 часов после начала работы второго рабочего перевели на другой участок, и первый рабочий закончил работу за 8 часов. Сколько часов потребовалось бы второму рабочему для того, чтобы выполнить весь заказ самостоятельно?

567. Валя и Света выполняют контрольную работу. Валя отвечает за час на 12 вопросов работы, а Света — на 15. Они одновременно начали выполнять работу, и Валя выполнила всю работу позже Светы на 15 минут. Сколько вопросов в работе?

568. Первая труба пропускает на 15 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 300 литров она заполнит на 18 минут быстрее, чем первая труба?

569. Каменщики Антон и Петя выкладывают один кирпичный забор за 8 часов, Петя и Дима выполняют эту же работу за 12 часов, а Антон и Дима — за 9,6 часа. Найдите, за сколько часов каменщики выполнят эту работу, если будут работать втроём.

570. В помощь садовому насосу, перекачивающему 6 литров воды за 4 минуты, подключили второй насос, перекачивающий тот же объём воды за 2 минуты. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 27 литров воды?

571. Один токарь может выполнить заказ за 10 часов, второй — за 15 часов, а третий — за 12 часов. За сколько часов три токаря выполнят заказ, работая совместно?

572. Маша и Даша выполняют одинаковый тест. Маша за час отвечает на 15 вопросов теста, а Даша — на 12. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Даша закончила свой тест на 20 минут позже Маши. Сколько вопросов содержал тест?

2.1.4. Разные задачи

573. Заводу поступил срочный заказ: изготовить за ночь детали определённого вида. Заказчик принял на себя обязательство заплатить за каждую изготовленную деталь по 500 рублей. В распоряжении завода имеется три бригады, каждая из которых состоит из специалистов и учеников. Состав бригад приведен в таблице.

Бригада	Специалисты	Ученики
№ 1	10 человек	5 человек
№ 2	7 человек	13 человек
№ 3	11 человек	2 человека

Один специалист за ночь изготавливает 20 деталей, а ученик — 7 деталей. Завод в ночь может выставить для работы только одну бригаду. В результате решения руководства завода в ночь вышла работать бригада, которая принесёт заводу наибольшую выручку. Сколько тысяч рублей заплатит заказчик заводу за изготовленные ночью детали?

574. Из города A в город B можно добраться напрямую, а можно поехать через населенный пункт C. Расстояния между всеми пунктами указаны на рисунке 229. Средняя скорость на прямой дороге до B равна 80 км/ч, на дороге от A до C — 60 км/ч, от C до B — 100 км/ч. Сколько часов займет наиболее быстрый путь от A до B?

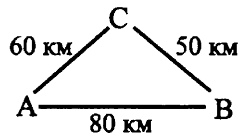


Рис. 229.

575. Спортсмен выполняет прыжки в воду с вышки. Уравнение траектории его движения, пока он не коснулся воды, описывается формулой $y = -2t^2 + 8$ (y — высота в метрах, t — время в секундах). Сколько секунд спортсмен находился на высоте не менее шести метров от поверхности воды?

576. Из города A в город B можно добраться напрямую, а можно поехать через населенный пункт C. Расстояния между всеми пунктами указаны на рисунке 230. Средняя скорость на прямой дороге до B равна 60 км/ч, на дороге от A до C — 100 км/ч, от C до B — 80 км/ч. Сколько часов займет наиболее долгий путь от A до B?

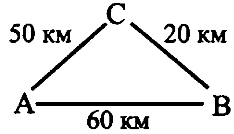


Рис. 230.

577. Лыжник прыгает с трамплина. Уравнение траектории его движения, пока он не приземлился, описывается формулой $y = -\frac{1}{2}t^2 + 5$ (y — высота в метрах, t — время в секундах). Сколько секунд лыжник находился на высоте не менее трёх метров?

578. Колебания грузика на пружине описываются формулой $l = 20 + 5\cos t$ (где l — длина пружины в сантиметрах, t — время, прошедшее с начала колебаний в секундах). Определите, сколько раз за первые 12 с длина пружины становилась равной 18 см.

579. На схеме (см. рис. 231) указаны длины туристических маршрутов (в км). На маршрутах, изображённых сплошной линией, средняя скорость движения равна 6 км/ч. На маршрутах, изображённых пунктирной линией, средняя скорость движения равна 4 км/ч. Туристы выбрали 8-часовой маршрут из пункта A в пункт C. Чему равна длина этого маршрута?

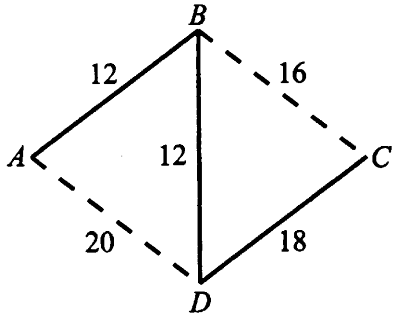


Рис. 231.

580. Мяч ударился о стенку на высоте 3 метра, после этого мяч упал на землю по такой траектории, что расстояние до земли как функция расстояния до стенки выражалась формулой $h(d) = 3 - 0,48d^2$ (все величины указаны в метрах). На каком расстоянии от стенки мяч коснулся земли (ответ также укажите в метрах)?

581. Три карандаша весят на 7 граммов больше, чем одна ручка, а три ручки весят на 11 граммов больше, чем один карандаш. Сколько весят 5 ручек и 5 карандашей (ответ укажите в граммах)?

582. В таблице представлены результаты прохождения эстафеты, состоящей из трёх дистанций, участниками одной из команд.

Определите среднюю скорость (в м/мин), с которой была пройдена вся дистанция эстафеты участниками этой команды.

Номер участника эстафеты	**Время, за которое пройдена дистанция (в секундах)**		
	1-я дистанция (3000 м)	2-я дистанция (2700 м)	3-я дистанция (1500 м)
12	480		
15		450	
23			270

583. Движение автомобиля во время торможения описывается формулой $S(t) = 30t - 5t^2$ (S — тормозной путь в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала торможения до полной остановки автомобиля). Найдите, сколько секунд автомобиль находился в движении с момента начала торможения до его полной остановки.

584. В таблице представлены данные о времени движения двух электричек на различных участках пути.

Определите наименьшую среднюю скорость (в км/ч), с которой можно доехать от станции 1 до станции 6, если продолжительность остановки на каждой станции составляет 1,5 мин (время стоянки на станциях 1 и 6 не учитывать) и расстояние между этими станциями равно 117 км.

Номера электричек	**Время прохождения участков пути, мин**					
	от 1 до 2	от 2 до 3	от 3 до 4	от 4 до 5	от 5 до 6	от 6 до 7
I	20	20	25	26	20	23
II	20	25	24	25	20	19

585. Мяч после удара о поверхность Земли движется вертикально вверх. Высота мяча определяется по формуле $h(t) = 4t - t^2$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее после удара о Землю). Определите, сколько секунд мяч находился на высоте не менее 3 м.

586. В таблице приведён денежный годовой оборот (в у. е.) бирж A и B по кварталам.

Биржа	**Годовой оборот в у.е.**			
	I квартал	II квартал	III квартал	IV квартал
A	$4{,}2 \cdot 10^4$	$13 \cdot 10^3$	$0{,}87 \cdot 10^5$	$2{,}3 \cdot 10^4$
B	$0{,}63 \cdot 10^5$	$4{,}7 \cdot 10^4$	$22 \cdot 10^3$	$3{,}7 \cdot 10^4$

Определите, на сколько у. е. годовой оборот биржи A меньше годового оборота биржи B.

587. Точка движется по координатной прямой по закону
$S(t) = 0{,}25t^4 - 12t^2 - 3t + 8$ (S — расстояние в сантиметрах, t — время в секундах, прошедшее с момента движения). В какой момент времени после начала движения ускорение точки будет равно 3 см/с^2?

588. Владелец фирмы считает, что если объём выпуска продукции будет 250 единиц в год, то его прибыль составит 120 000 у.е. По таблице определите прибыль владельца фирмы за год (в у.е.), если она прямо пропорциональна объёму выпускаемой продукции.

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Объём продукции, ед.	19	23	26	18	20	20	20	20	32	27	35	40

589. Точка движется по координатной прямой по закону
$S(t) = \dfrac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t - 15$ (S — расстояние в сантиметрах, t — время в секундах, прошедшее с момента движения). Определите ускорение точки через 3 секунды после начала движения.

590. Из города выезжают два автомобиля и некоторое время движутся по законам $S_1(t) = -t^2 + 6t$ и $S_2(t) = 4t$. На каком расстоянии от города они поравняются?

591. Бабушке для вышивания картины требовалось ниток тёплых тонов в два раза больше, чем холодных. После того как она заменила некоторые нитки по своему вкусу, ниток тёплых тонов оказалось в полтора раза больше, чем холодных. Во сколько раз бабушка использовала ниток холодных тонов больше, чем предполагалось изначально?

592. Из имеющегося мяса запланировано было сделать котлеты и отбивные, причём котлет в полтора раза меньше, чем отбивных. После приготовления оказалось, что котлет в 1,2 раза меньше, чем отбивных, но их суммарное количество осталось запланированным. Во сколько раз предполагаемое количество отбивных больше того, которое было изготовлено?

593. При игре в бадминтон высота (в м), на которой находится волан, описывается формулой $h(t) = 2 + 4t - t^2$. Сколько секунд волан находится на высоте не менее 5 метров?

594. Теплоход рассчитан на 840 пассажиров и 26 членов команды. Спасательная шлюпка может вместить 72 человека. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

595. Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	**Абонентская плата**	**Плата за трафик**
1. План «0»	Нет	1,2 руб. за 1 Mb
2. План «800»	650 руб. за 800 Mb трафика в месяц	2 руб. за 1 Mb сверх 800 Mb
3. План «Безлимитный»	900 руб. в месяц	Нет

Пользователь планирует, что его трафик составит 950 Mb и, исходя из этого, выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 950 Mb?

596. Брандспойт, закреплённый под определённым углом на пожарной машине, выстреливает струю воды с постоянной начальной скоростью. Траектория струи воды описывается формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $a = -\frac{1}{450}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = 1$ — постоянные параметры. На каком минимальном расстоянии в метрах от забора нужно расположить машину, чтобы вода перелетала через верх? Высота забора 13 м.

597. Для изготовления книжных витрин требуется заказать 10 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла 2,5 м^2. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стекла и шлифовку краёв. Сколько рублей стоит самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена стекла (рублей за 1 м^2)	Резка и шлифовка (рублей за одно стекло)
А	220	185
Б	240	125
В	260	120

598. Строительной фирме нужно приобрести 50 кубометров пенобетона у одного из трёх поставщиков. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Цена пенобетона (рублей за 1 м^3)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	2300	4500	
Б	2250	5500	При заказе на сумму свыше 100 000 рублей доставка бесплатно
В	2350	3700	При заказе более 60 м^3 доставка бесплатно

599. Стоимость проезда в маршрутном такси составляет 14 рублей, а стоимость проезда в автобусе — 9 рублей. Андрей каждый день ездит в институт и домой без пересадок на маршрутке. Сколько рублей за 30 дней он сэкономит, если будет вместо этого ездить на автобусе также без пересадок?

600. Полуторалитровая бутылка воды стоит 15 рублей 50 копеек. Какое наибольшее число литров воды можно купить на 200 рублей, если покупать воду только в таких полуторалитровых бутылках?

601. Стоимость проезда в троллейбусе 8 рублей. Ярослав 3 дня в неделю ездит в институт и обратно без пересадок. На сколько больше денег (в рублях) за неделю он потратит, если будет ездить вместо троллейбуса на такси, с учетом того, что расстояние от института до его дома 12 км, а тариф такси — 60 рублей за первые 5 км и по 10 рублей за каждый следующий километр?

602. Объём усечённой пирамиды с площадями оснований S_1 и S_2 и высотой h считается по формуле $V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})$. Определите (в см) наименьшую площадь S_2, чтобы объём пирамиды был не меньше $\frac{7}{3}$ см^3, если $S_1 = 1$ см^2, $h = 1$ см.

603. Стоимость проезда в автобусе от Ростова до Новочеркасска 32 рубля, а расстояние между ними составляет 40 км. На сколько дешевле обойдется поездка вдвоём из Ростова в Новочеркасск на автомобиле, если расход бензина — 6,7 литров на 100 км, а литр бензина стоит 22 рубля? (Ответ укажите в рублях.)

604. Объём усечённой пирамиды с площадями оснований S_1 и S_2 и высотой h вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})$. Определите (в см^2) наименьшую площадь S_2, при которой объём пирамиды будет не меньше $\frac{19}{3}$ см^3, если $S_1 = 4$ см^2, $h = 1$ см.

605. Для остекления веранды требуется заказать 35 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла 0,24 м^2. В таблице приведены цены на стекло и на резку стёкол. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за одно стекло)	Дополнительные условия
А	315	20	
Б	330	17	
В	400	10	При заказе товара на сумму свыше 2 000 рублей резка бесплатно

606. Маршрутное такси за месяц проезжает 10 000 км. Стоимость одного литра бензина составляет 21, 2 рублей. Средний расход бензина на 100 км составляет 11 л. Каковы ежемесячные затраты (в руб.) на бензин для одного маршрутного такси?

607. Для перевозки 10 т груза на 170 км можно воспользоваться услугами одной из трёх транспортных компаний. Каждая компания предлагает необходимое количество автомобилей одной грузоподъёмности. Сколько рублей будет стоить наиболее дешёвый способ перевозки?

Компания-перевозчик	Стоимость перевозки (руб. за 10 км)	Грузоподъёмность автомобиля (т)
А	70	2,4
Б	100	3
В	120	4

608. Килограмм апельсинов стоит 35 рублей. Сколько рублей сдачи получит покупатель со ста рублей при покупке 1 кг 700 г апельсинов?

609. Строительной фирме нужно приобрести 70 кубометров строительного бруса у одного из трёх поставщиков. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Цена бруса (руб. за $м^3$)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	2400	16400	
Б	2600	2300	При заказе на сумму свыше 190 000 руб. доставка бесплатно
В	2700	4700	При заказе на сумму свыше 170 000 руб. доставка бесплатно

610. На спидометре американского автомобиля скорость указывается в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 75 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

611. Строительной фирме нужно приобрести 110 кубометров пенобетона у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько тысяч рублей придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

Поставщик	Цена пенобетона (руб. за м^3)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	2200	17400	
Б	2300	9800	При заказе на сумму свыше 250 000 руб. доставка бесплатно
В	2500	500	При заказе более 100 м^3 доставка бесплатно

612. Для строительства гаража можно использовать один из двух типов фундамента: бетонный или пеноблочный. Для фундамента из пеноблоков необходимо 6 кубометров пеноблоков и 3 мешка цемента. Для бетонного фундамента необходимо 4 тонны щебня и 45 мешков цемента. Кубометр пеноблоков стоит 2200 рублей, щебень стоит 700 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 250 рублей. Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

613. Сварили 5 литров вишнёвого компота и 9 литров абрикосового. Сколько банок вместимостью 700 мл можно полностью заполнить этими компотами? (Считать, что компоты нельзя смешивать.)

614. Круассан стоит 6 рублей 80 копеек. Какое наибольшее число круассанов можно купить на 50 рублей?

615. Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за 1 минуту разговора
Повременный	100 руб. в месяц	0,4 руб.
Комбинированный	250 руб. за 8 часов в месяц	0,3 руб. за 1 минуту сверх 8 часов в месяц
Безлимитный	330 руб.	0 руб.

Абонент выбрал наиболее дешёвый тарифный план, исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров составляет 600 минут в месяц. Какую сумму он должен заплатить за месяц, если общая длительность разговоров в этом месяце составит 500 минут? Ответ укажите в рублях.

616. У фермера 53 куриных и 48 гусиных яиц. Сколько потребуется инкубаторов для вывода птенцов из этих яиц, если в каждый инкубатор можно поместить 19 яиц?

16. Зак. № 6

617. Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	3 руб. за 1 Mb
План «400»	500 руб. за 400 Mb трафика в месяц	2 руб. за 1 Mb сверх 400 Mb
План «800»	750 руб. за 800 Mb трафика в месяц	1 руб. за 1 Mb сверх 800 Mb

Пользователь предполагает, что его трафик составит 700 Mb в месяц и, исходя из этого, выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик составит 600 Mb?

618. Семья из четырёх человек едет из одного города в другой. Можно ехать поездом, а можно на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 830 руб. Автомобиль расходует 9 литров бензина на 100 км пути, расстояние по шоссе равно 1600 км, а цена бензина составляет 21,3 рубля за литр. Сколько рублей будет стоить самая дешёвая поездка для этой семьи?

619. Саша купила абонемент для занятий танцами на 8 посещений. За время действия абонемента она посетила 7 занятий. Сколько рублей она сэкономила, если разовое занятие стоит 320 рублей, а абонемент на 8 занятий — 1870 рублей?

620. Клиент хочет арендовать автомобиль на двое суток для поездки по маршруту протяжённостью 1500 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость аренды. Помимо аренды, клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Сколько рублей заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за сутки)
А	Дизельное	6,5	3670
Б	Бензин	9,6	3200
В	Газ	13,2	3250

Цена дизельного топлива 16 рублей за литр, бензина — 20 рублей за литр, газа — 15 рублей за литр.

621. Билет на выставку известного художника стоит 300 рублей. Стоимость билета для студента художественного училища составляет 40% от обычной стоимости. За день выставку посетило 73 человека, из них 52 являются студентами художественного училища имени Сурикова. Сколько рублей должно быть в кассе?

622. Для изготовления книжных полок требуется заказать 50 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла равна 0,3 м^2. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку и шлифовку края. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	**Цена стекла (руб. за 1 м^2)**	**Резка и шлифовка (руб. за одно стекло)**
А	380	81
Б	410	78
В	415	73

623. От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в часах.

Автобус	От дома до автобусной станции 10 минут	Автобус в пути: 2 часа 15 минут	От остановки автобуса до дачи пешком 20 минут
Электричка	От дома до станции железной дороги 30 минут	Электричка в пути: 1 час	От станции до дачи пешком 45 минут
Маршрутное такси	От дома до остановки маршрутного такси 15 минут	Маршрутное такси в пути: 1 час 50 минут	От остановки маршрутного такси до дачи пешком 25 минут

624. В магазине проходит акция: четыре лимона по цене трёх. Какое наибольшее число лимонов можно приобрести за 100 рублей, если один лимон стоит 7 рублей?

625. Клиент хочет арендовать автомобиль на двое суток для поездки протяжённостью 1200 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	Дизельное	9	3300
Б	Бензин	12	3100
В	Газ	15	3000

Цена дизельного топлива — 21 рубль за литр, бензина — 22 рубля за литр, газа — 17 рублей за литр.

626. В пачке 500 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 800 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 3 недели?

627. Своему постоянному клиенту компания сотовой связи решила предоставить на выбор одну из скидок: либо скидку 30% на звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе, либо 15% на звонки в другие регионы, либо 25% на услуги мобильного интернета. Клиент посмотрел распечатку своих звонков и выяснил, что за месяц он потратил 420 рублей на звонки абонентам других компаний в своём регионе, 280 рублей на звонки в другие регионы и 460 рублей на мобильный интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же, и, исходя из этого, выбирает самую выгодную для себя скидку. Сколько рублей клиент предполагает заплатить в следующем месяце с учётом скидки суммарно за звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе, звонки в другие регионы и мобильный интернет?

628. Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана:

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за 1 минуту разговора
1. Super	60 руб. в месяц	0,5 руб.
2. Extra	320 руб. за 500 минут в месяц	0,4 руб. за 1 минуту сверх 500 минут в месяц
3. Super Extra	420 руб. в месяц (безлимитный тариф)	

Абонент выбрал наиболее дешёвый тарифный план, исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров составит 700 минут в месяц. Однако фактически он проговорил 500 минут. Сколько рублей составила переплата по сравнению с оптимальным для данной ситуации тарифом?

629. Из пункта A в пункт D ведут три линии железной дороги. На дороге, ведущей через B, максимально допустимая средняя скорость — 60 км/ч, через C — 70 км/ч, а на той, которая не имеет промежуточных пунктов, — 90 км/ч. Если два поезда идут по одной линии, то между ними должен быть выдержан интервал хотя бы в 20 минут. На рисунке 232 показана схема линий и расстояние между пунктами по линиям. Три поезда готовы выехать из A одновременно (но могут и в разное время). Каково наименьшее количество часов, за которое все три поезда доберутся в D?

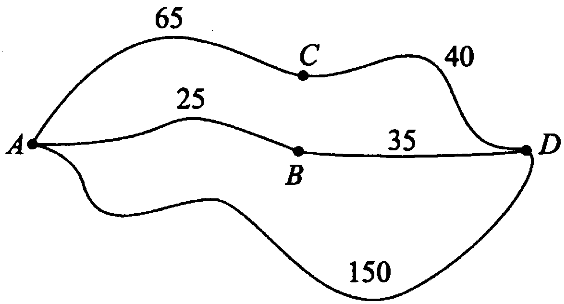


Рис. 232.

630. Семье из четырёх человек (двое взрослых и двое несовершеннолетних детей) необходимо добраться из Ростова-на-Дону в Санкт-Петербург. Можно ехать поездом, можно лететь самолётом, при этом билеты на участок пути до Москвы и после Москвы приобретаются независимо. Стоимость билета Ростов-на-Дону — Москва составляет 1400 рублей на поезде и 1320 рублей на самолёте. А от Москвы до Санкт-Петербурга стоимость билета на поезд составляет 820 рублей и 1120 рублей — на самолёт. При этом стоимость проезда между вокзалом и аэропортом составляет 27 рублей с каждого человека за услуги метрополитена. Если же добираться только поездом, то пересадка осуществляется на одном вокзале. Аналогично, если добираться двумя самолётами, то пересадка осуществляется в одном аэропорту. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую поездку, если железная дорога предоставляет несовершеннолетним скидку в размере 10%, и вся семья перемещается, не разделяясь?

631. Своему постоянному клиенту компания сотовой связи решила предоставить возможность подключения нескольких услуг. Услуга «Счастье» представляет собой скидку 15% на звонки абонентам других сотовых компаний в регионе, стоимость подключения услуги 50 рублей. Услуга «Вызов свободе» представляет собой скидку 8% на звонки в другие регионы, стоимость подключения услуги 120 рублей. Услуга «Паук» заключается в двадцатипроцентной скидке на услуги мобильного интернета, стоимость её подключения 60 рублей.

Клиент посмотрел распечатку своих звонков за прошлый месяц и выяснил, что за месяц он потратил 450 рублей на звонки абонентам других компаний в своём регионе, 700 рублей — на звонки в другие регионы и 500 рублей на мобильный интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце он будет совершать звонки в другие регионы, использовать мобильный интернет, совершать звонки абонентам других компаний в своём регионе в тех же временных и информационных объёмах. Сколько рублей он может максимально сэкономить, подключив соответствующие услуги, если его предположение окажется верным?

632. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 2 рубля 60 копеек. Счётчик электроэнергии 1 мая показывал 7381 киловатт-час, а 1 июня — 8124 киловатт-часа. Сколько рублей надо заплатить за электроэнергию за май?

633. В таблице указаны средние цены на некоторые товары в продуктовых магазинах «Мечта», «Правда», «Здоровый дух».

Наименование товара	**«Мечта» (цены в руб.)**	**«Правда» (цены в руб.)**	**«Здоровый дух» (цены в руб.)**
Пирожок с мясом	21	23	27
Пирожок с печенью	17	16	18
Хачапури с сыром	33	29	36
Хачапури с мясом	45	43	40
Сок, 1 л	42	44	46
Конфеты, 1 кг	128	130	124

Определите, в каком из этих магазинов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 5 хачапури с сыром, 4 л сока и 7 кг конфет. В ответ напишите стоимость данного набора в этом магазине (в рублях).

634. Летом килограмм помидоров стоит 40 рублей. Валентина Львовна купила 3 кг 300 г помидоров. Сколько рублей сдачи она должна получить с 1000 рублей?

635. Магазин одежды «Карлсон» заключает договоры со швейными фабриками. В договорах указывается, какой процент от суммы, вырученной за продажу одежды, поступит в доход магазина.

Фирма-производитель	**Процент от выручки, поступающий в доход магазина**	**Примечание**
«Бети»	9%	Все изделия
«Прометей»	12%	Изделия ценой до 5500 рублей
«Прометей»	7%	Изделия ценой свыше 5500 рублей
«Искра»	11%	Все изделия

В прейскуранте приведены цены на 4 пиджака. Определите, продажа какого пиджака наиболее выгодна для магазина. В ответ запишите, сколько рублей поступит в доход магазина от продажи этого пиджака.

Фирма-производитель	**Изделие**	**Цена (руб.)**
«Прометей»	Пиджак «Браво»	5600
«Прометей»	Пиджак «Вау»	5300
«Искра»	Пиджак «Супер»	4800
«Бети»	Пиджак «Классик»	5200

636. Диагональ экрана составляет 63,5 см. Сколько дюймов составляет диагональ экрана? (Считать, что один дюйм равняется 2,54 см).

637. Для того чтобы построить забор, фирме надо приобрести 3 тонны кирпича. Один кирпич весит 4 кг.

Фирма	Цена за 1 кирпич (руб.)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
«Строитель»	17,5	1000	При покупке на сумму более 12 000 руб. доставка бесплатно
«Атлант»	16	1500	При покупке свыше 700 кирпичей доставка со скидкой 50%
«Титан»	15,5	1200	

Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

638. Гражданин К. купил абонемент в театр и посетил 13 спектаклей. Сколько рублей он сэкономил, если абонемент обошёлся в 4500 рублей, а каждый отдельный билет на соответствующие места стоил 400 рублей?

639. Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за одну минуту разговора
«Маятник»	Нет	0,38 рублей
«Подобие»	150 рублей за 350 минут	0,26 рублей за 1 минуту сверх 350 минут
«Болтун» (безлимитный)	250 рублей	

Абонент выбрал наиболее дешёвый тарифный план, исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров составит 600 минут в месяц. Какую сумму он должен заплатить за месяц, если общая продолжительность разговора в этом месяце действительно составит 600 минут? Ответ дайте в рублях.

640. Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,6 грамма в сутки в течение 42 дней. В одной упаковке 12 таблеток по 0,2 грамма. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

641. Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяжённостью 1600 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды, клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за сутки)
А	Дизельное	5	3400
Б	Бензин	9	1100
В	Газ	12	2100

Цена дизельного топлива — 17,8 рублей за литр, бензина — 26,5 рублей за литр, газа — 14 рублей за литр.

642. Тетрадь стоит 2 руб. 98 коп. Какое наибольшее количество тетрадей можно купить на 600 руб.?

643. Для транспортировки 73 тонн сахара на 800 км можно воспользоваться услугами одной из трёх фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъёмность автомобилей для каждого перевозчика указана в таблице. Сколько рублей будет стоить самая дешёвая перевозка?

Поставщик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъёмность автомобилей
«Отрочество»	4100	4,5
«Юность»	9300	12
«Зрелость»	8300	10

644. Одна роза стоит 80 рублей. В пятницу в цветочном магазине действует специальное предложение: заплатив за две розы, покупатель получает три розы (одну — в подарок). Какое наибольшее количество роз можно получить за 500 рублей в пятницу в этом магазине?

645. Одна поездка по железной дороге (для взрослого человека) из пункта А в пункт Я стоит 800 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 60% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 16 школьников и 2 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

646. Из пункта A в пункт D ведут три дороги. Через пункт B идёт грузовик со средней скоростью 48 км/ч, через пункт C идёт автобус со средней скоростью 55 км/ч. Третья дорога без промежуточных пунктов, и по ней движется легковой автомобиль со средней скоростью 82 км/ч. На рисунке 233 показана схема дорог и расстояние (в км) между пунктами по дорогам. Все три автомобиля выехали из A одновремен-

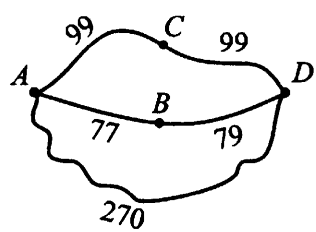


Рис. 233.

но. Какой автомобиль доберётся до D раньше других? В ответе укажите, сколько часов он будет находиться в дороге.

647. В летнем лагере на каждого участника полагается 400 граммов риса в день. В лагере 143 человека. Сколько килограммовых пачек риса понадобится на весь лагерь на 8 дней?

648. В первом банке одну украинскую гривну можно купить за 4,23 рубля. Во втором банке 40 гривен — за 164 рубля. В третьем банке 30 гривен — за 122 рубля 40 копеек. Какую наименьшую сумму (в рублях) придётся заплатить за 120 гривен?

649. Василий Петрович загружает на свой компьютер из интернета файл размером 78 Мб за 63 секунды, Василий Егорович — 79 Мб за 64 секунды, а Василий Васильевич — 77 Мб за 62 секунды. Сколько секунд будет загружаться файл объёмом 462 Мб на компьютер с наибольшей скоростью загрузки из сети интернет?

650. В среднем трафик гражданина Сеткина за месяц в дневное время составляет 1,3 Гб, а в ночное время 3,2 Гб. Раньше Сеткин платил 120 рублей за каждый гигабайт трафика, но год назад он перешёл на другой тарифный план, и теперь за гигабайт трафика днём он платит 180 рублей, а ночью — 79 рублей. В течение 12 месяцев тарифы и трафик не менялись. На сколько рублей больше заплатил бы Сеткин за год, если бы не перешёл на другой тарифный план? (Трафик не округляется.)

651. Семья из трёх человек планирует поехать из Санкт-Петербурга в Красный Сулин. Можно ехать поездом, а можно на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 1360 рублей. Автомобиль расходует 9 л бензина на 100 км, цена бензина — 26,5 рублей за литр, а расстояние по шоссе 1700 км. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку на троих?

652. В пачке 500 листов А4. За один рабочий день фирма расходует 230 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 21 рабочий день?

653. Для строительства гаража можно использовать один из двух типов фундамента: бетонный или фундамент из пеноблоков. Для фундамента из пеноблоков необходимо 4,5 кубометра пеноблоков и 2 мешка цемента. Для бетонного фундамента необходимо 3 тонны щебня и 30 мешков цемента. Кубометр пеноблока стоит 2200 рублей, щебень стоит 750 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 260 рублей. Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

654. В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 50 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	**Подача машины**	**Продолжительность и стоимость минимальной поездки**	**Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки (в руб.)**
«С ветерком»	100 рублей	Нет	9
«В путь»	Бесплатно	15 мин — 150 руб.	11
«В дорогу»	50 рублей	15 мин — 150 руб.	10

655. В доме, в котором живёт Джек, 7 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже по 4 квартиры. Джек живёт в квартире № 58. В каком подъезде живёт Джек?

656. При строительстве сельского дома можно использовать один из двух типов фундамента: каменный или бетонный. Для каменного фундамента необходимо 10 тонн природного камня и 12 мешков цемента. Для бетонного фундамента — 6 тонн щебня и 46 мешков цемента. Тонна камня стоит 1220 рублей, щебень стоит 680 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 240 рублей. Сколько рублей будет стоить материал для фундамента, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

§ 3. Геометрия

3.1. Планиметрия

3.1.1. Вписанная и описанная окружность, треугольник

657. В треугольнике ABC синус угла C равен $\frac{3}{5}$, $AC = 5$, радиус вписанной в этот треугольник окружности равен 1. Найдите сторону BC, если $AB < AC$.

658. Около равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) с углом B, равным $30°$, описана окружность радиусом $7\sqrt{2}$. Её диаметр AD пересекает сторону BC в точке E. Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника AEC.

659. Окружность радиусом 15, вписанная в равнобедренный треугольник, делит боковую сторону этого треугольника в отношении 2 : 3, считая от вершины основания. Во сколько раз длина окружности, описанной около этого треугольника, превосходит число π?

660. В равнобедренном треугольнике точка касания вписанной окружности делит боковую сторону в отношении 2 : 5, считая от вершины основания. Радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен $2\sqrt{5}$. Найдите боковую сторону.

661. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса $\sqrt{2}$. Его вершины делят окружность на три части в отношении 1 : 2 : 3. Найдите сторону правильного треугольника, площадь которого равна площади треугольника ABC.

662. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, считая стороны квадратных клеток равными 1 (см. рис. 234).

663. В четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 17$, $BC = 14$ и $CD = 22$ вписана окружность (см. рис. 235). Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.

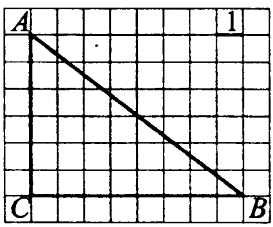


Рис. 234.

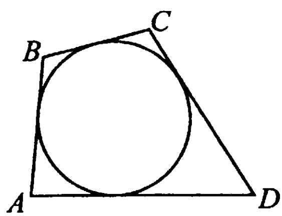


Рис. 235.

664. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 125°, угол CAD равен 55° (см. рис. 236). Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.

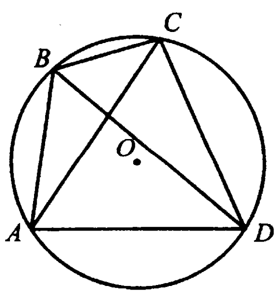


Рис. 236.

665. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 8. Найдите высоту этого треугольника (см. рис. 237).

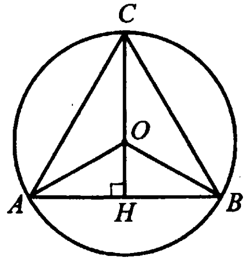


Рис. 237.

3.1.2. Прямоугольный треугольник

666. Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см^2, а его периметр — 24 см. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

3.1.3. Треугольник

667. В треугольнике ABC точка D делит сторону AC на отрезки $AD = 4$ и $DC = 5$, $\angle BAC = 30°$, $\angle ABD = \angle ACB$. Найдите площадь треугольника ABD.

668. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен $120°$. Расстояние от точки M, лежащей внутри треугольника, до основания треугольника равно $\frac{1}{\sqrt{3}}$, а до боковых сторон равно 3. Найдите AC.

669. В треугольнике ABC сторона BC равна $2\sqrt{97}$, и она больше половины стороны AC. Найдите сторону AB, если медиана BM равна 12, а площадь треугольника ABC равна 96.

670. В треугольнике ABC сторона AB равна 10, угол A — острый. Найдите медиану BM, если $AC = 20$, а площадь треугольника ABC равна 96.

671. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $AM : MB = 3 : 4$ и $BN : NC = 3 : 5$. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника MNA равна 9.

672. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $AM : MB = 2 : 3$ и $BN : NC = 4 : 9$. Найдите площадь четырёхугольника $AMNC$, если площадь треугольника ABC равна 130.

673. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что длина отрезка AD равна 3, косинус угла BDC равен $\frac{13}{20}$, а сумма углов ABC и ADB равна π. Найдите периметр треугольника ABC, если длина стороны BC равна 2.

674. Отрезки KP и MH имеют равные длины и пересекаются в точке O так, что $KH \parallel MP$, $OH = 4$, $OM = 5$. Найдите отношение периметров треугольников OKM и OHP. Отрезки KP и MH имеют равные длины и пересекаются в точке O так, что $KH \parallel MP$, $OH = 4$, $OM = 5$. Найдите отношение периметров треугольников OKM и OHP.

675. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются под прямым углом. Найдите сторону AB этого треугольника, если $AC = 30$ и $BC = 12\sqrt{5}$.

676. Дан треугольник ABC. Известно, что $AC = 10$, $BC = 12$ и $\angle CAB = 2\angle CBA$. Найдите длину стороны AB.

677. В треугольнике ABC с тупым углом B и со стороной BC длиной 5 проведена биссектриса BD. Площади треугольников ABD и BCD равны соответственно $\frac{60\sqrt{2}}{11}$ и $\frac{50\sqrt{2}}{11}$. Найдите длину стороны AC.

678. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 6, а диаметр вписанной окружности равен 2. Найдите радиус описанной около данного треугольника окружности.

679. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M, при этом $AB_1 = 24$, $BB_1 = 32$. Найдите площадь треугольника ABM.

680. В равнобедренном треугольнике KLM с основанием KM высоты LP и KB пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника KLO, если $LO = 5$, $PO = 4$.

681. В $\triangle ABC$ $\angle A = 30°$, точка O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Прямые AO и BO пересекают описанную вокруг $\triangle ABC$ окружность в точках M и N соответственно. Найдите величину угла C в градусах, если известно, что $AM = MN$.

682. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к боковой стороне, делит её в отношении $5 : 8$, считая от вершины. Найдите длину основания данного треугольника, если радиус его вписанной окружности равен 2.

683. В равнобедренном треугольнике ABC с равными сторонами AC и CB и углом при вершине C, равным $120°$, проведены биссектрисы AM и BN, равные 5. Найдите площадь четырёхугольника $ANMB$.

684. В равнобедренном треугольнике ABC с равными сторонами AC и CB и углом при вершине C, равным $120°$, проведены биссектрисы AM и BN. Найдите длину биссектрисы BN, если площадь четырёхугольника $ANMB$ равна 12,25.

685. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B проведена биссектриса CD. Найдите площадь треугольника ACD, если $CB = 6$, $BD = 3$.

686. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла BAC, равного $60°$. Известно, что $BC = 6$, $CD = 2$. Определите градусную меру угла ABC.

687. В равнобедренном треугольнике с острым углом при вершине боковая сторона равна 25, а его площадь равна 300. Найдите основание треугольника.

688. Биссектриса AM треугольника ABC делит сторону CB на отрезки $CM = 10$ и $MB = 14$. AB равно $21\sqrt{2}$. Найдите радиус описанной вокруг ΔABC окружности.

689. На координатной плоскости заданы точки $A(-1;3)$, $B(2;-3)$, $C(-1;-4)$. Вычислите площадь треугольника ABC.

690. На координатной плоскости заданы точки $A(0;1)$, $B(3;2)$, $C(3;5)$. Вычислите площадь треугольника ABC.

691. В равнобедренном треугольнике PKM с основанием PM боковая сторона PK равна 13, а $\cos P = \frac{\sqrt{105}}{13}$. Найдите высоту, проведённую к основанию.

692. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = \frac{3}{5}$, $AB = 20$. Найдите BC.

693. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos B = \frac{4}{5}$, $AB = 15$. Найдите AC.

694. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 10$, $BC = 8$. Найдите $\cos A$.

695. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 29$, $BC = 21$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

696. В треугольнике ABC $AB = 8$, $\angle A = \angle B$, $\cos A = \frac{4}{5}$. Найдите биссектрису CH.
697. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $\cos A = 0{,}6$. Найдите площадь треугольника ABC.
698. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона равна 22, а $\cos C = \frac{4\sqrt{6}}{11}$. Найдите высоту, проведённую к основанию.
699. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 8, а высота, проведённая к основанию, равна $3\sqrt{7}$. Найдите косинус угла A.
700. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AB = \sqrt{13}$, $AC = 3$. Найдите $\operatorname{ctg} \angle A$.
701. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 3$, $BC = 3\sqrt{3}$. Найдите $\sin \angle B$.
702. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\sin B = 0{,}2$, $BC = 6\sqrt{6}$. Найдите AC.
703. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $AB = 25$, $\cos A = 0{,}28$. Найдите BC.
704. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 10$, $\sin A = \frac{12}{13}$. Найдите высоту CH.
705. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AB = 12{,}5$, $BC = 12$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.
706. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $AB = 1{,}6$, а диагональ прямоугольника равна 2. Найдите синус угла ACD.
707. В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, CH — высота, $AB = 2{,}5$, $BH = 2$. Найдите косинус угла ABC.
708. В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, $AB = 13$, высота CH равна 5. Найдите котангенс угла ABC.
709. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 26$, CH — высота, $AH = 10$. Найдите тангенс угла ACB.
710. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, CH — высота, $BC = 8$, $BH = 2\sqrt{7}$. Найдите $\cos \angle A$.
711. В треугольнике ABC (см. рис. 238) угол B равен $90°$, $BC = 5$, $\operatorname{tg} \angle C = 2{,}4$. Найдите AC.
712. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos \angle B = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите синус внешнего угла при вершине B.

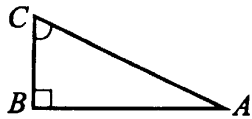


Рис. 238.

713. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона $AB = 10$, $\cos\angle A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите высоту, проведённую к основанию.

714. В треугольнике ABC $AC = BC = 16$, $\sin\angle B = \frac{3\sqrt{23}}{16}$. Найдите AB.

715. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin\angle A = \frac{7}{36}$, $AB = 144$. Найдите BC.

716. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = \sqrt{74}$, $AC = 5$. Найдите котангенс угла B.

717. В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 8$, высота $CH = \sqrt{28}$. Найдите косинус угла ACB.

718. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = 0{,}2$, $AC = 6\sqrt{6}$. Найдите BC.

719. В треугольнике ABC угол C равен $90°$. Найдите синус внешнего угла при вершине A, если $\operatorname{tg} A = \frac{4}{3}$.

720. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 3, а косинус угла при вершине равен $-0{,}28$. Найдите радиус вписанной в него окружности.

721. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC = 5$, $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{21}}{2}$. Найдите высоту CH.

722. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $BC = 8$, $\sin A = \frac{1}{4}$. Найдите AH.

723. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 9 (см. рис. 239). Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма $CLDK$.

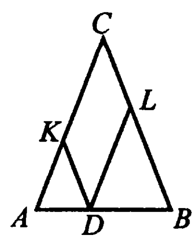


Рис. 239.

724. В треугольнике ABC $AC = CB$, AH — высота, $\sin\angle BAC = 0{,}2$. Найдите $\cos\angle BAH$.

725. В треугольнике ABC $AC = BC = 9$, $\cos A = \frac{4}{5}$. Найдите высоту CH.

726. В треугольнике ABC угол A равен 64°, угол B равен 80°. AL, BN и CK — биссектрисы, пересекающиеся в точке O (см. рис. 240). Найдите угол AOK. Ответ дайте в градусах.

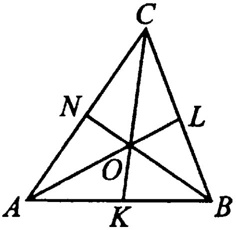


Рис. 240.

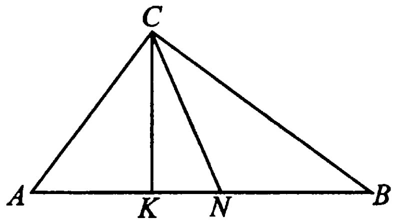


Рис. 241.

727. Острые углы прямоугольного треугольника равны 38° и 52°. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла (см. рис. 241). Ответ дайте в градусах.

728. Сумма двух углов треугольника и внешнего угла к третьему равна 70°. Найдите третий угол треугольника. Ответ дайте в градусах.

729. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 30$, $AC = 18$. Найдите синус внешнего угла при вершине A.

3.1.4. Параллелограмм. Квадрат. Ромб

730. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекаются в точке L, лежащей на стороне AD. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если известно, что $CL = 12$, а площадь $\triangle ABL$ равна 15.

731. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекаются в точке L, лежащей на стороне AD. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что $BL = 6$, а периметр $\triangle CDL$ равен 18.

732. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекают сторону AD в точках L и K соответственно. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что $BL = 6$, $CK = 8$ и $AB : AD = 1 : 3$.

733. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекают сторону AD в точках L и K соответственно. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что $BL = 5$, $CK = 12$ и $AB : AD = 2 : 3$.

734. В параллелограмме $ABCD$ точка M лежит на прямой CD. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма O и точку M проведена прямая, которая пересекает BC в точке E и AD в точке F. Найдите отношение площадей $S_{EFCD} : S_{ECM}$, если $EC : FD = 2 : 1$.

735. В параллелограмме $ABCD$ через точку пересечения диагоналей проведена прямая, которая отсекает на сторонах BC и AD отрезки $BE = 1{,}6$ и $AF = 6{,}4$. M — точка пересечения прямых AB и EF. Найдите периметр треугольника ABD, если $BM = 1$ и $\angle BAD = 60°$.

736. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K и прямую BC в точке P. Найдите периметр треугольника BKP, если $DC = 10$, $PK = 6$, $DK = 9$.

737. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону CD в точке M и прямую AD в точке N. Найдите периметр треугольника ABN, если $MD = 5$, $MN = 4$, $BM = 6$.

738. В параллелограмме $ABCD$ проведена высота CH к стороне AD. Косинус угла A равен $-\frac{\sqrt{5}}{5}$, а сторона AB равна $2\sqrt{5}$. Прямая BH делит диагональ AC в отношении $3:5$, считая от вершины A. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

739. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла D пересекает стороны AB в точке N и прямую BC в точке M. Найдите длину отрезка CN, если $DC = 3\sqrt{3}$, $MD = 9$, $BN = \sqrt{3}$.

740. Определите синус острого угла параллелограмма, если его высоты равны 5 и 7, а периметр равен 48.

741. Определите тангенс острого угла параллелограмма, если его высоты равны $3\sqrt{2}$ и $5\sqrt{2}$, а периметр равен 32.

742. Дан ромб $ABCD$ с острым углом при вершине A. Площадь ромба равна 135, а $\sin\angle A = \frac{3}{5}$. Высота DK пересекает диагональ AC в точке L. Найдите длину отрезка DL.

743. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 20$, $\sin C = \frac{3}{5}$. Высота, опущенная из вершины B, пересекает сторону AD в точке H. Найдите площадь треугольника ABH.

744. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 20$, $\cos A = \frac{4}{5}$. Высота, опущенная из вершины D, пересекает сторону BC в точке H. Найдите площадь треугольника CDH.

745. В параллелограмме $ABCD$ с острым углом C $\sin A = 0{,}28$. Найдите $\cos B$.

746. Найдите площадь ромба, если его высота равна $\sqrt{2}$, а тупой угол $150°$.

747. Диагонали четырёхугольника равны 6 и 9 (см. рис. 242). Найдите периметр четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырёхугольника.

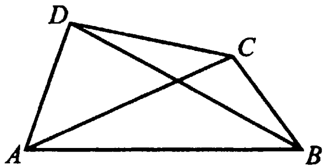


Рис. 242.

748. Диагонали ромба относятся как 3 : 4. Периметр ромба равен 300. Найдите высоту ромба.

3.1.5. Трапеция

749. Средняя линия трапеции равна 10 и делит площадь трапеции в отношении 3 : 5. Найдите длину большего основания трапеции.

750. В равнобедренной трапеции длины оснований 21 и 9, а длина высоты 8. Найдите диаметр описанной около трапеции окружности.

751. Основания трапеции равны 10 и 5, а диагонали — 9 и 12. Найдите площадь трапеции.

752. В трапецию $ABCD$ с прямым углом BAD вписана окружность радиуса 5. Найдите среднюю линию трапеции, если угол между ней и боковой стороной CD трапеции равен 30°.

753. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали AC и BD равны 18 и 16 соответственно. На диагонали AC как на диаметре построена окружность, пересекающая прямую AB в точке K. Найдите длину AK, если известно, что $\angle CAB$ в два раза меньше $\angle ABD$.

754. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали AC и BD равны 12 и 10 соответственно. Найдите площадь трапеции, если $\angle CAB$ в два раза меньше $\angle ABD$.

755. Прямоугольная трапеция описана около окружности. Точка касания делит боковую сторону трапеции на отрезки длиной 2 и 8. Найдите периметр трапеции.

756. В трапеции $ABCD$ отношение длин оснований AD и BC равно 3. Диагонали трапеции пересекаются в точке O, площадь треугольника AOB равна 6. Найдите площадь трапеции.

757. В трапеции $ABCD$ отношение длин оснований AD и BC равно 2. Диагонали трапеции пересекаются в точке O, площадь треугольника BOC равна 3. Найдите площадь четырёхугольника $BOCP$, где P — точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции.

758. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а длина её средней линии равна 9. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.

759. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 17 соответственно, боковые стороны равны 13. Найдите тангенс острого угла трапеции.

760. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 3, высота трапеции равна 5. Котангенс острого угла равен 1,4. Найдите большее основание.

761. Большее основание равнобедренной трапеции равно 27, боковая сторона равна 25. Синус угла при основании трапеции равен 0,96. Найдите меньшее основание.

762. В равнобедренной трапеции косинус острого угла равен $\frac{1}{4}$, а основания равны 5 и 9. Найдите боковую сторону трапеции.

763. Высота равнобедренной трапеции равна $4\sqrt{3}$, а продолжения боковых сторон пересекаются на расстоянии $6\sqrt{3}$ от большего основания под углом 60°. Найдите сумму оснований трапеций.

764. Основания трапеции равны 5 и 7. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции (см. рис. 243).

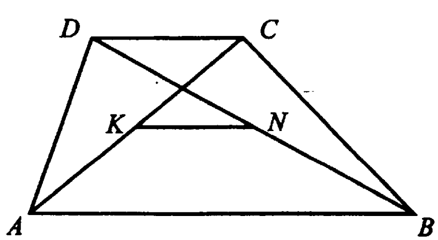


Рис. 243.

765. Основания равнобедренной трапеции равны 11 и 27. Боковые стороны равны 17. Найдите тангенс острого угла трапеции.

3.1.6. n-угольники

766. Около окружности, радиус которой равен $3\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, описан правильный двенадцатиугольник. Найдите радиус окружности, описанной около этого двенадцатиугольника.

3.1.7. Окружность, касательная, секущая

767. Хорды окружности AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P. PH — высота треугольника ADP. Угол $ADP = 30°$, $AH = 2$, $PC = 6$. Найдите отношение площади треугольника ADC к площади треугольника ABC.

768. Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 3 и 4. Расстояние между их центрами равно 5. Определите длину их общей хорды.

769. Пусть MN и KF — диаметры окружности с центром в точке O (см. рис. 244). Угол MKF равен 38°. Найдите угол FON. Ответ дайте в градусах.

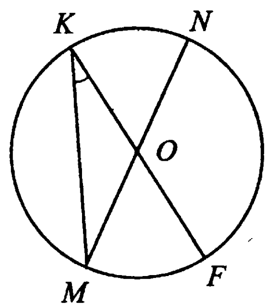


Рис. 244.

770. В окружность радиуса 11 вписан квадрат, в который также вписана окружность. Во внутреннюю окружность вписан прямоугольный треугольник с тангенсом одного из углов, равным 7. Найдите площадь этого треугольника.

771. Хорда BC делит окружность радиуса 14 на две части, градусные величины которых относятся как 6 : 30 (см. рис. 245). Найдите хорду BC.

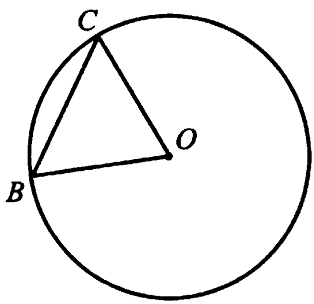


Рис. 245.

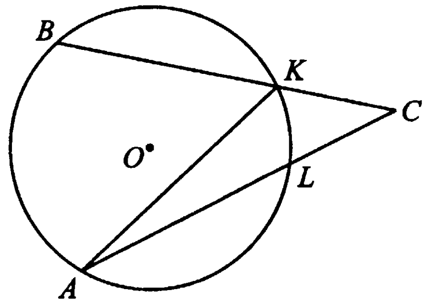


Рис. 246.

772. Угол ACB равен 26°. Градусная величина дуги AB окружности, не содержащей точек K и L, равна 80° (см. рис. 246). Найдите угол KAL. Ответ дайте в градусах.

3.1.8. Разные задачи

773. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён отрезок (см. рис. 247). Найдите его длину в сантиметрах.

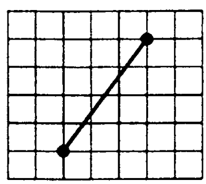


Рис. 247.

774. Найдите произведение длин векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ (см. рис. 248).

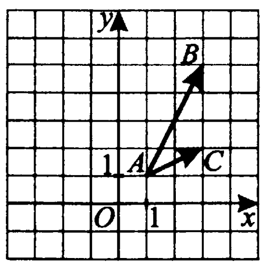


Рис. 248.

775. Найдите длину медианы AM треугольника ABC (см. рис. 249).

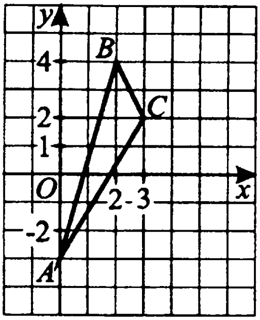


Рис. 249.

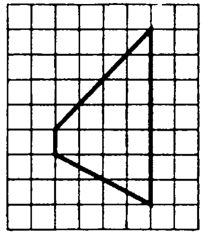


Рис. 250.

776. На клетчатой бумаге 1 см×1 см изображена трапеция (см. рис. 250). Найдите её площадь в см^2.

777. На клетчатой бумаге с клетками 1 см×1 см изображён треугольник (см. рис. 251). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

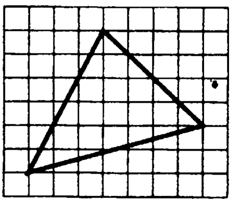


Рис. 251.

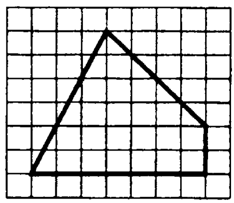


Рис. 252.

778. На клетчатой бумаге с клетками 1 см×1 см изображён четырёхугольник (см. рис. 252). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

779. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 253). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

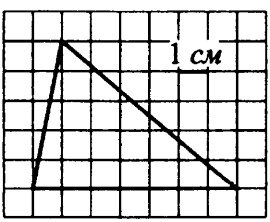


Рис. 253.

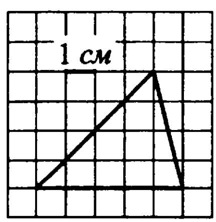


Рис. 254.

780. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 254). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

781. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 255). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

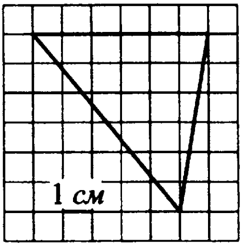


Рис. 255.

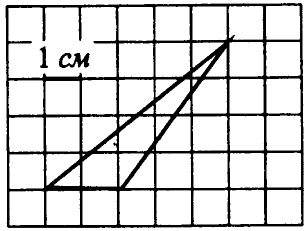


Рис. 256.

782. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 256). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

783. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 257). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

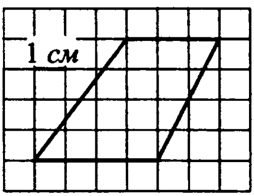


Рис. 257.

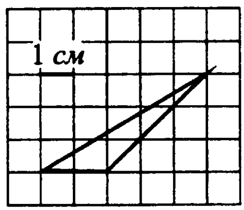


Рис. 258.

784. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см×1 см изображён треугольник (см. рис. 258). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

785. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см×1 см изображена трапеция (см. рис. 259). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

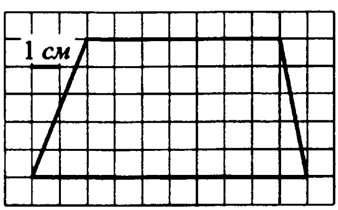


Рис. 259.

786. Найдите площадь треугольника (см. рис. 260), вершины которого имеют координаты (0; 0), (5; 6), (9; 4).

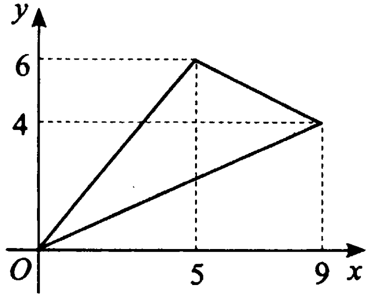


Рис. 260.

787. Найдите площадь параллелограмма (см. рис. 261), вершины которого имеют координаты (2; 4), (2; 7), (10; 1), (10; 4).

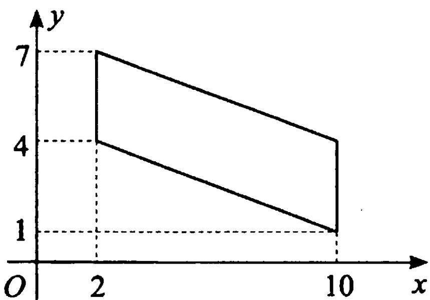


Рис. 261.

788. Найдите площадь четырёхугольника (см. рис. 262), вершины которого имеют координаты (2; 6), (3; 1), (9; 7), (10; 2).

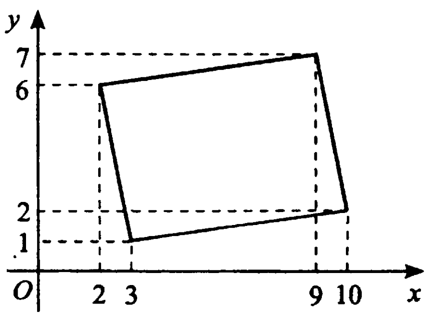


Рис. 262.

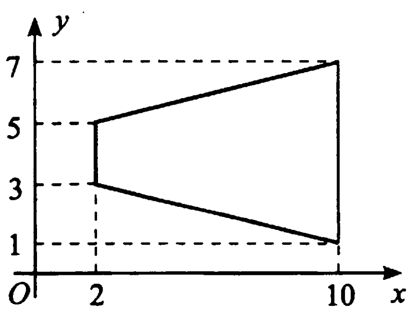


Рис. 263.

789. Найдите площадь трапеции (см. рис. 263), вершины которой имеют координаты (2; 3), (2; 5), (10; 1), (10; 7).

790. Найдите площадь трапеции (см. рис. 264), вершины которой имеют координаты (2; 1), (3; 6), (8; 6), (11; 1).

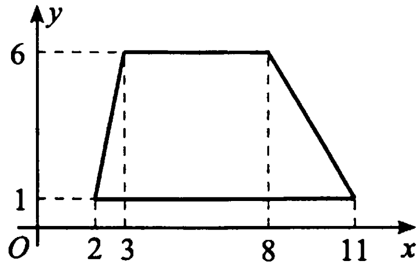


Рис. 264.

791. Найдите площадь четырёхугольника (см. рис. 265), вершины которого имеют координаты (2; 2), (6; 7), (9; 1), (13; 4).

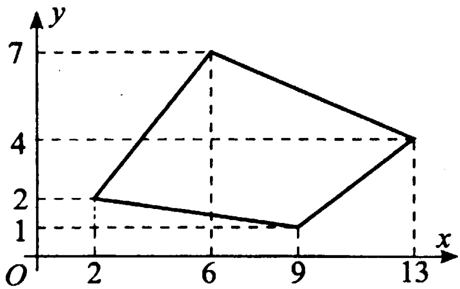


Рис. 265.

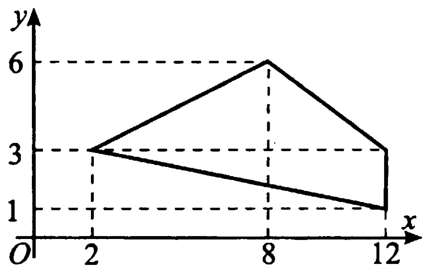


Рис. 266.

792. Найдите площадь четырёхугольника (см. рис. 266), вершины которого имеют координаты (2; 3), (8; 6), (12; 1), (12; 3).

793. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см×1 см изображён квадрат (см. рис. 267). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

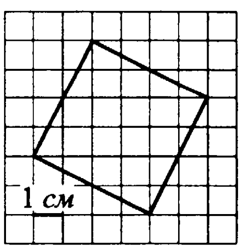


Рис. 267.

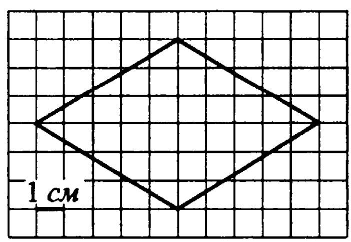


Рис. 268.

794. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см×1 см изображён ромб (см. рис. 268). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

795. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см×1 см изображён четырёхугольник (см. рис. 269). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

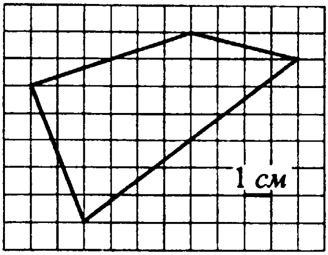


Рис. 269.

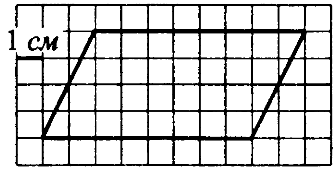


Рис. 270.

796. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см×1 см изображён параллелограмм (см. рис. 270). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

797. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см×1 см изображён параллелограмм (см. рис. 271). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

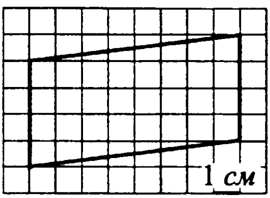


Рис. 271.

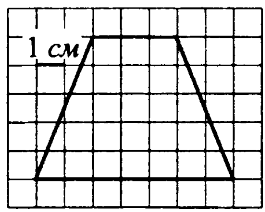


Рис. 272.

798. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см×1 см (см. рис. 272). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

799. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см×1 см (см. рис. 273). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

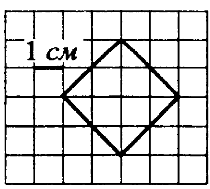


Рис. 273.

800. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (2; 3), (4; 7), (7; 7), (10; 3) (см. рис. 274).

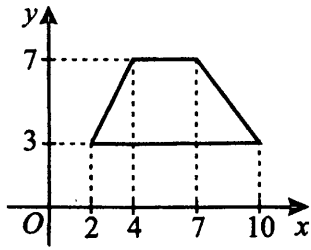


Рис. 274.

801. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты (0; 5), (4; 7), (7; 0), (11; 2) (см. рис. 275).

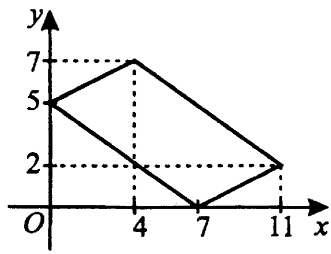


Рис. 275.

802. Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 276). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

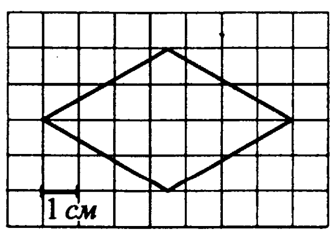


Рис. 276.

803. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 277). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

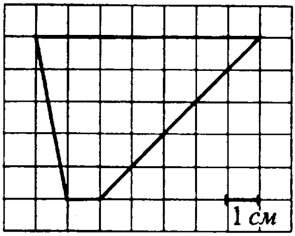


Рис. 277.

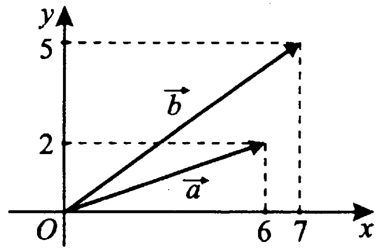


Рис. 278.

804. Найдите сумму координат вектора $\vec{a} - \vec{b}$ (см. рис. 278).

805. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 1,5 и 2. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DO}$ (см. рис. 279).

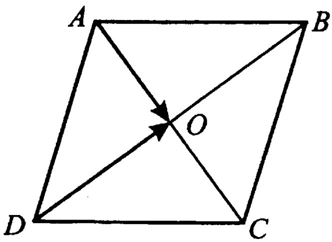


Рис. 279.

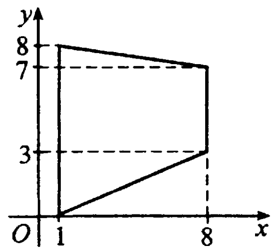


Рис. 280.

806. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (1; 0), (1; 8), (8; 3), (8; 7) (см. рис. 280).

807. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см изображена фигура (см. рис. 281). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

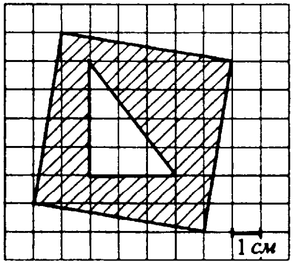


Рис. 281.

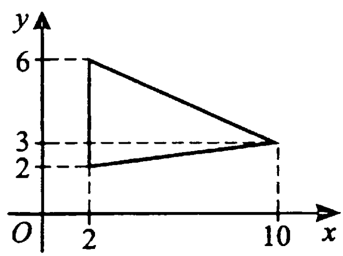


Рис. 282.

808. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (2; 2), (2; 6), (10; 3) (см. рис. 282).

809. Найдите синус угла AOB (см. рис. 283). В ответе укажите значение синуса, умноженное на $\sqrt{13}$.

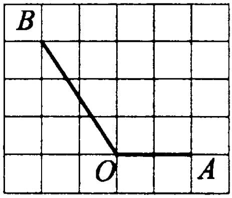


Рис. 283.

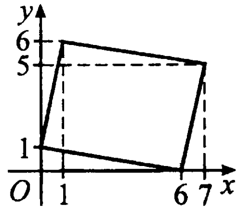


Рис. 284.

810. Найдите площадь параллелограмма, вершины которого имеют координаты $(0; 1)$, $(1; 6)$, $(7; 5)$, $(6; 0)$ (см. рис. 284).

811. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 285). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

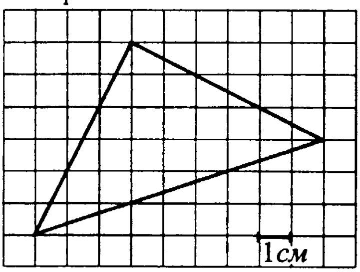


Рис. 285.

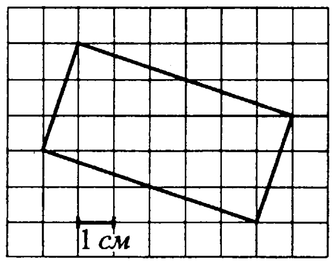


Рис. 286.

812. Найдите площадь прямоугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 286). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

813. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты $(3; 1)$, $(7; 1)$, $(7; 7)$, $(9; 7)$ (см. рис. 287).

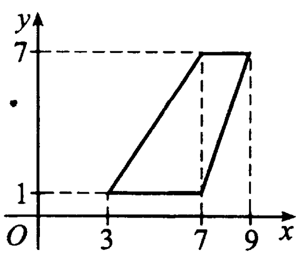


Рис. 287.

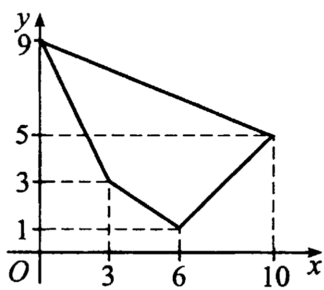


Рис. 288.

814. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(0; 9)$, $(3; 3)$, $(6; 1)$, $(10; 5)$ (см. рис. 288).

815. Найдите площадь закрашенной фигуры на координатной плоскости (см. рис. 289).

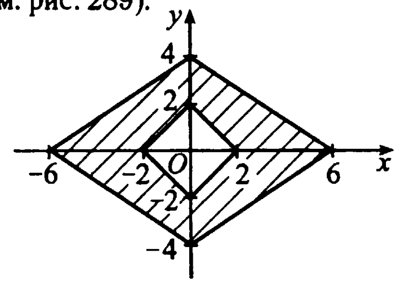


Рис. 289.

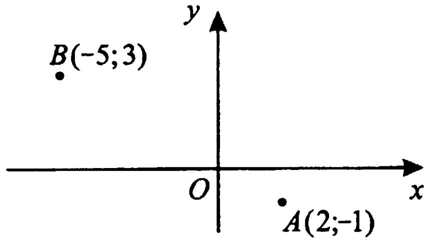


Рис. 290.

816. Найдите абсциссу середины отрезка, соединяющего точки $A(2; -1)$ и $B(-5; 3)$ (см. рис. 290).

817. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см изображена заштрихованная фигура (см. рис. 291). Найдите её площадь S в квадратных сантиметрах. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.

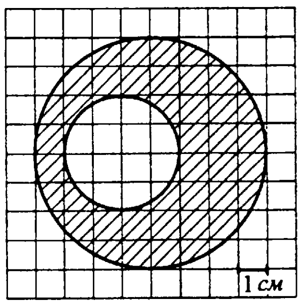


Рис. 291.

818. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(-4; 0)$, $(-2; 8)$, $(2; 3)$, $(5; 5)$ (см. рис. 292).

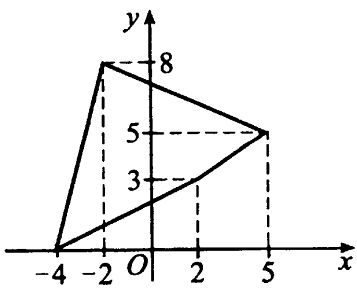


Рис. 292.

819. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 293). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

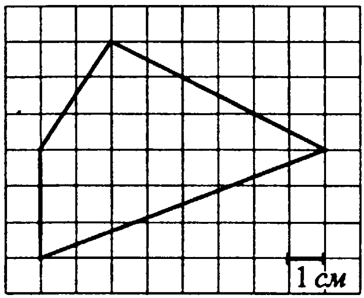


Рис. 293.

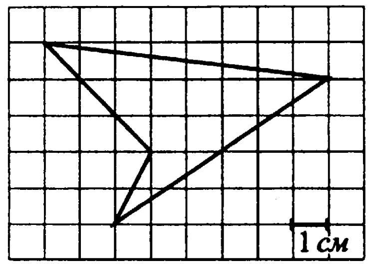


Рис. 294.

820. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 294). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

821. Площадь сектора круга радиуса 4 равна 9 (см. рис. 295). Найдите длину его дуги.

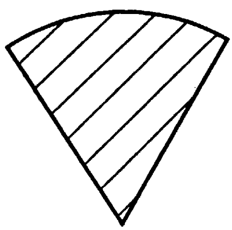


Рис. 295.

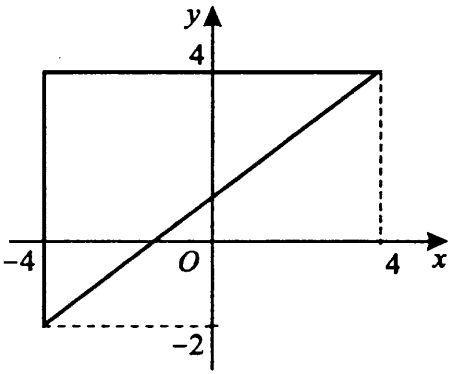


Рис. 296.

822. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты (−4; −2), (−4; 4), (4; 4) (см. рис. 296).

3.2. Стереометрия

3.2.1. Пирамида

823. Боковые рёбра правильной четырёхугольной пирамиды равны 5, сторона основания равна 8 (см. рис. 297). Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

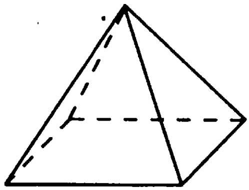


Рис. 297.

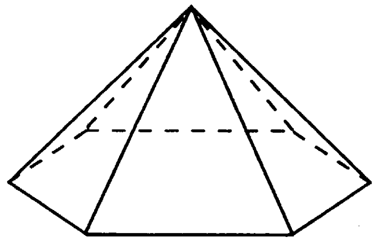


Рис. 298.

824. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые рёбра равны 13 (см. рис. 298). Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

825. Объём первой пирамиды равен 24 м^3. У второй пирамиды площадь основания в 6 раз больше, чем площадь основания первой пирамиды, а высота второй пирамиды в три раза меньше, чем у первой. Найдите объём второй пирамиды. Ответ дайте в кубических метрах.

826. Найдите сторону основания правильной треугольной пирамиды, если боковое ребро равно 16, а высота пирамиды равна 8.

827. Найдите боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды, если сторона основания равна 6, а высота равна $3\sqrt{14}$.

828. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие наклонены к плоскости основания под углом 30°. Высота пирамиды равна 5. Найдите объём пирамиды.

829. Диагональ AC основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 24. Длина бокового ребра равна 13 (см. рис. 299). Найдите высоту SO.

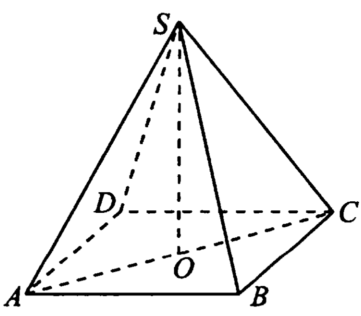


Рис. 299.

830. Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра, если все рёбра увеличить в 1,7 раза?

831. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна 18, а апофема равна 14.

3.2.2. Призма. Параллелепипед

832. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду (см. рис. 300). Уровень воды достигает 20 см. На какой высоте (в сантиметрах) будет находиться уровень воды, если её перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 2 раза больше, чем у первого?

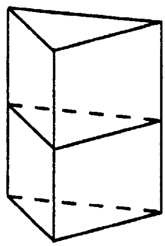


Рис. 300.

833. Объём правильной шестиугольной призмы равен $3\sqrt{3}$, сторона основания равна 2 (см. рис. 301). Найдите высоту призмы.

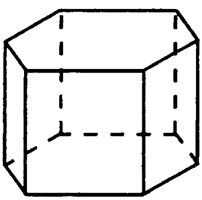


Рис. 301.

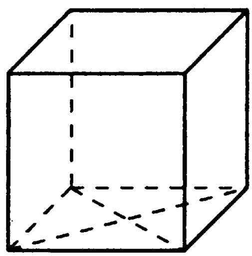


Рис. 302.

834. Найдите площадь боковой поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 10 и 24, а её боковое ребро равно 20 (см. рис. 302).

835. Найдите площадь поверхности правильной четырёхугольной призмы, если сторона её основания равна 10, а высота равна 6 (см. рис. 303).

836. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру (см. рис. 304). Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы, если площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 18.

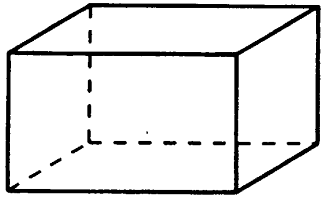


Рис. 303.

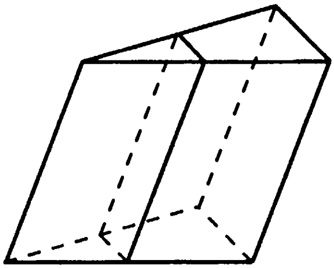


Рис. 304.

837. Найдите квадрат расстояния между вершинами D и C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со сторонами $AB = 6$, $AD = 7$, $AA_1 = 9$.

838. В сосуд, имеющий форму правильной тринадцатиугольной призмы налили 720 см^3 воды, а затем полностью погрузили туда деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 18 см до отметки 21 см. Чему равен объём детали? Объём выразите в см^3.

839. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 9,3. Найдите расстояние между точками C_1 и F_1.

840. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки C, A_1, B_1, C_1, D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 8$, $AD = 12$, $AA_1 = 4$ (см. рис. 305).

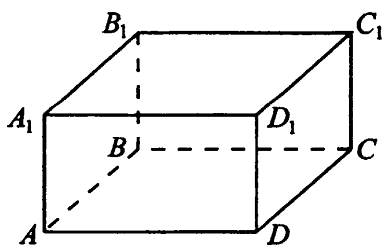


Рис. 305.

841. Найдите объём призмы, в основаниях которой лежит квадрат со стороной 2,5, а боковые рёбра равны $8\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 60°.

842. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которого $AA_1 = 17$, $AB = 19$, $AD = 17\sqrt{3}$. Найдите угол B_1CB. Ответ дайте в градусах.

843. Найдите котангенс угла ABD_2 многогранника, изображённого на рисунке 306.

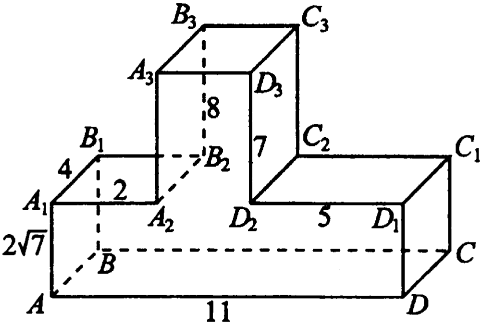


Рис. 306.

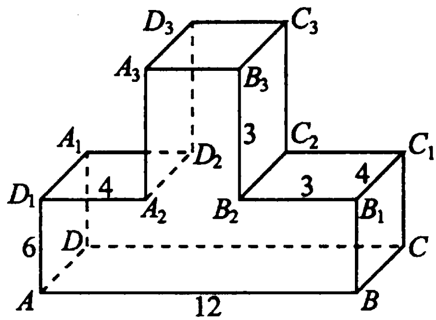


Рис. 307.

844. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 17, а боковое ребро 8. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки C, D, E, F, C_1, D_1, E_1, F_1.

845. Найдите косинус угла BA_2A_3 многогранника, изображённого на рисунке 307. Все двугранные углы многогранника — прямые.

846. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 308), у которого $AB = 4$, $AD = 22$, $AA_1 = 6$.

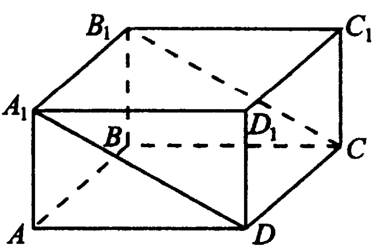


Рис. 308.

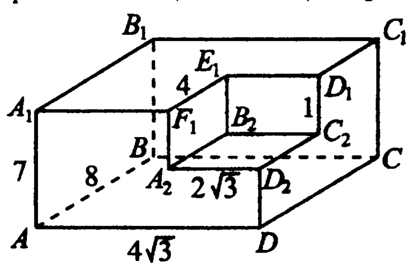


Рис. 309.

847. Найдите угол AB_2B многогранника, изображённого на рисунке 309. Ответ дайте в градусах.

848. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 23,5. Найдите его объём.

849. Найдите расстояние между вершинами A_1 и E многогранника, изображённого на рисунке 310. Все двугранные углы многогранника — прямые.

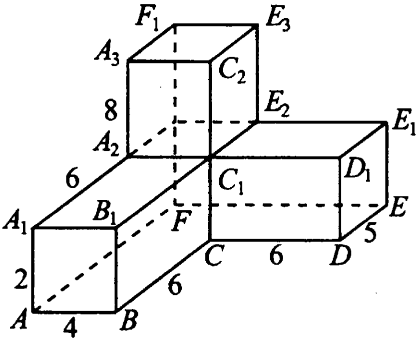


Рис. 310.

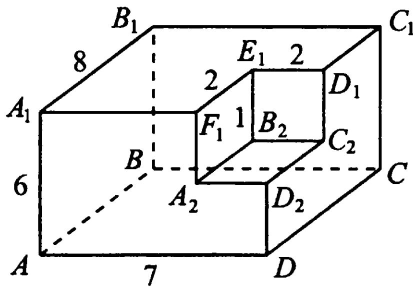


Рис. 311.

850. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и B_2 многогранника, изображённого на рисунке 311.

851. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 2, а высота — 19. Найдите квадрат расстояния между A и E_1.

852. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 48 и 14. Площадь её поверхности равна 728. Найдите высоту призмы.

853. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра основания и боковые рёбра равны 8. Найдите угол AC_1C. Ответ дайте в градусах.

854. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 4, а высота AA_1 равна $8\sqrt{2}$. Найдите расстояние между точкой C и серединой бокового ребра AA_1.

855. Найдите расстояние между вершинами D и B_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = AA_1 = 17{,}5$, $AD = 17{,}5\sqrt{2}$.

3.2.3. Куб

856. Диагональ грани куба равна $3\sqrt{2}$ (см. рис. 312). Найдите объём куба.

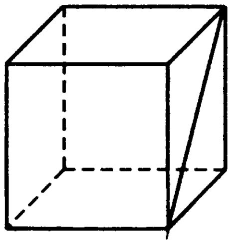


Рис. 312.

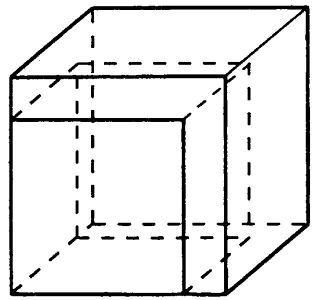


Рис. 313.

857. Ребро куба равно 5. Насколько нужно его увеличить, чтобы площадь поверхности куба увеличилась на 144 (см. рис. 313)?

858. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 314). Объём треугольной пирамиды A_1BC_1D равен 3. Чему равен объём куба?

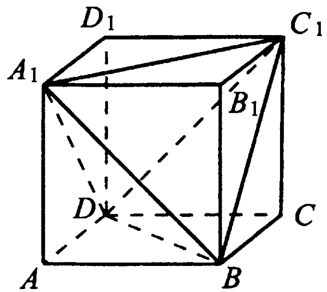


Рис. 314.

3.2.4. Конус

859. Объём первого конуса равен 6 см^3. У второго конуса и высота, и образующая в два раза больше, чем у первого. Найдите объём второго конуса.

860. Найдите объём V части конуса, изображённой на рисунке 315. В ответе укажите значение величины $\dfrac{V}{\pi}$.

861. Объём первого конуса равен 18 м^3. У второго конуса высота в четыре раза меньше, а радиус основания в два раза больше, чем у первого. Найдите объём второго конуса. Ответ дайте в кубических метрах.

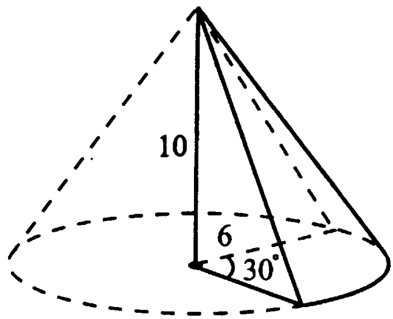


Рис. 315.

862. Площадь полной поверхности конуса равна 90π, а радиус основания равен 5. Найдите высоту конуса.

863. Радиус основания конуса равен 4, высота — 93. Найдите объём V части этого конуса, изображённой на рисунке 316. В ответе укажите $\dfrac{V}{\pi}$.

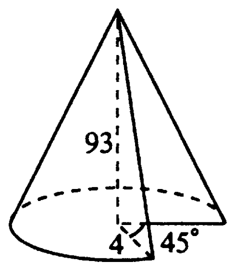


Рис. 316.

864. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Объём меньшего конуса 13,5. Определите объём исходного конуса.

865. Конус описан около правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания 24 и высотой 2,5. Найдите его объём, делённый на π.

3.2.5. Цилиндр

866. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 8π, высота равна 2 (см. рис. 317). Найдите диаметр основания цилиндра.

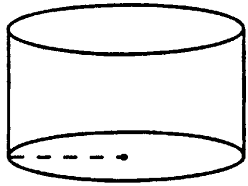


Рис. 317.

867. Радиус основания цилиндра равен 14, высота — 9. Найдите объём V части этого цилиндра, изображённой на рисунке 318. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

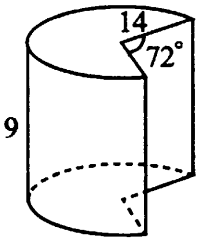


Рис. 318.

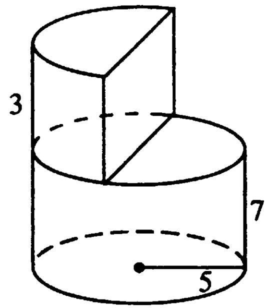


Рис. 319.

868. Найдите объём V части фигуры, изображённой на рисунке 319. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

3.2.6. Комбинации тел

869. Основания цилиндра и конуса совпадают, а площадь полной поверхности цилиндра в два раза больше площади полной поверхности конуса. Найдите длину образующей конуса, если высота цилиндра равна 10.

870. Объём конуса равен объёму цилиндра, а высота конуса в два раза больше высоты цилиндра. Площадь основания цилиндра равна 15. Найдите площадь основания конуса.

871. Сфера вписана в прямой круговой цилиндр с площадью основания 24. Чему равна площадь сферы?

872. В шар вписан цилиндр с площадью основания 4π и синусом угла между образующей цилиндра и диагональю его осевого сечения, равным $\frac{1}{5}$. Найдите отношение площади поверхности шара к площади основания цилиндра.

873. В правильном тетраэдре, площадь поверхности которого равна 18 см^2, отметили середины всех его рёбер и построили октаэдр с вершинами в этих серединах. Найдите площадь поверхности построенного октаэдра.

874. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны $\sqrt[3]{2}$. Найдите объём параллелепипеда.

875. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра. Радиус основания цилиндра равен 3. Объём параллелепипеда равен 72 (см. рис. 320). Найдите высоту цилиндра.

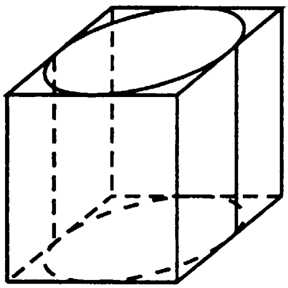


Рис. 320.

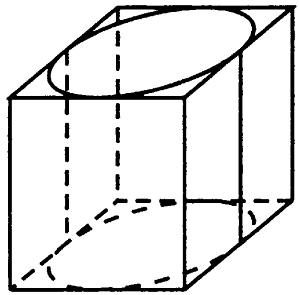


Рис. 321.

876. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра (см. рис. 321), радиус основания которого равен 5. Высота цилиндра равна 7. Найдите объём параллелепипеда.

877. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12. Боковые рёбра равны $\frac{4}{\pi}$ (см. рис. 322). Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

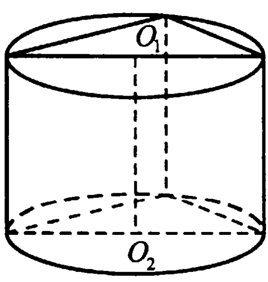


Рис. 322.

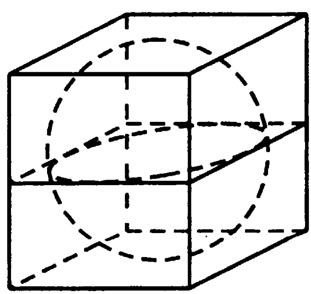


Рис. 323.

878. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиусом 2,5 (см. рис. 323). Найдите его объём.

879. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту (см. рис. 324). Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 15.

880. В окружность основания цилиндра вписан правильный треугольник (см. рис. 325). Найдите объём пирамиды той же высоты, что и цилиндр, в основании которого лежит этот треугольник, если объём цилиндра равен $\pi\sqrt{3}$.

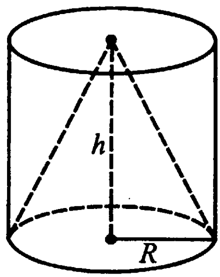


Рис. 324.

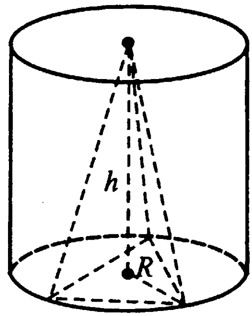


Рис. 325.

881. В основании пирамиды лежит правильный треугольник (см. рис. 326). В него вписана окружность, являющаяся основанием цилиндра той же высоты, что и пирамида. Найдите объём цилиндра, если объём пирамиды равен $\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$.

882. В основании пирамиды лежит правильный треугольник (см. рис. 326). В него вписана окружность, являющаяся основанием цилиндра, той же высоты, что и пирамида. Найдите объём пирамиды, если объём цилиндра равен $\pi\sqrt{3}$.

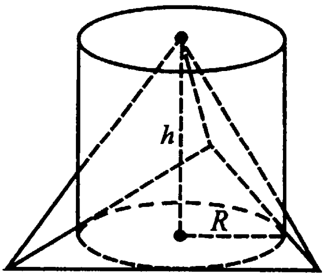


Рис. 326.

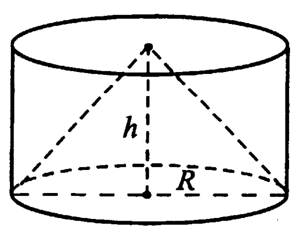


Рис. 327.

883. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту (см. рис. 327). Вычислите объём конуса, если объём цилиндра равен 12.

884. Правильная четырёхугольная призма описана около цилиндра, высота которого равна 2 (см. рис. 328). Найдите радиус цилиндра, если известно, что площадь боковой поверхности призмы равна 12.

885. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объём параллелепипеда (см. рис. 328).

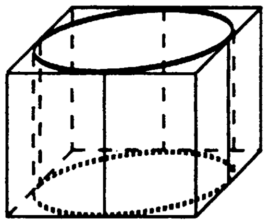


Рис. 328.

886. Объём цилиндра равен 9. У конуса радиус основания в 3 раза больше, а высота в 2 раза меньше. Найдите объём конуса.

§ 4. Теория вероятностей и статистика

4.1. Теория вероятностей

4.1.1. Классическое определение вероятности

887. В доме сорок восемь квартир. В тридцати из них ранним утром среды никого не будет. Пришедший в это время почтальон наберёт в домофон наудачу номер одной из квартир. Какова вероятность того, что ему ответят?

888. На книжной полке Максима 25 книг: 12 детективов, 4 учебника по математике и 9 книг в жанре фэнтези. Найдите вероятность того, что наудачу взятая с этой полки книга окажется учебником по математике.

889. Юра дважды бросал кубик. Найдите вероятность того, что при втором броске у него выпало столько же очков, сколько и при первом. Ответ округлите до сотых.

890. Пете и Юре нужно написать реферат на одну и ту же тему. Ученики нашли в интернете один и тот же набор из 10 рефератов на заданную тему, и каждый скачал наугад выбранный реферат из этого набора. Какова вероятность того, что представленные рефераты оказались различными?

891. Алексей подкидывает монетку до тех пор, пока не выпадет решка. Какова вероятность того, что он сделает ровно 4 подбрасывания?

892. В мешке лежит пять неразличимых на ощупь карточек с буквами А, Т, А, К, А. Какова вероятность того, что, наудачу извлекая по очереди карточки и выкладывая их на столе, можно получить слово «АТАКА»?

893. Какова вероятность того, что наудачу взятое целое число из диапазона 0—999 больше 449?

894. Карточки с цифрами от 1 до 4 наудачу извлекают из мешка и кладут по порядку. Какова вероятность того, что карточку с цифрой 3 извлекут последней?

895. В книге 400 страниц, из них на 36 есть картинки. Школьник открывает книгу на наудачу выбранной странице. Какова вероятность того, что на открытой странице не будет картинки?

896. Готовясь к экзамену по ОБЖ, Влад выучил 16 билетов из 40. На экзамене он вытянул наудачу 1 билет. Найдите вероятность того, что это будет выученный билет.

897. В партии 1050 деталей, из них 630 — типа А, а остальные — типа Б. Какова вероятность того, что наудачу взятая деталь — типа Б?

898. В классе 20 человек, из них четыре Светы и пять Дим. Директор вызвал наугад одного из учеников. Какова вероятность, что вызванного ученика зовут Света или Дима?

899. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно 1 раз.

900. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 12 очков. Ответ округлите до сотых.

901. На чемпионате мира по фигурному катания участвуют 75 спортсменов, среди них 12 — из России, 8 — из Китая. Порядок выступлений определяется жребием. Найдите вероятность того, что 13-м будет выступать спортсмен из России.

902. Ракета поражает цель с вероятностью 0,9. Какова вероятность того, что цель не окажется поражённой после 4 запусков ракеты?

903. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет не менее 11 очков. Ответ округлите до сотых.

904. Из семидесяти пяти парашютов шесть неисправных. Какова вероятность того, что наудачу взятый парашют исправен?

905. Мастер не выспался и за день из пятнадцати деталей сделал восемь бракованных. По стечению обстоятельств в конце дня комиссия технического контроля взяла на проверку две наудачу выбранные детали. Мастера уволят, если хотя бы одна деталь окажется бракованной. Какова вероятность того, что в результате проверки мастер прекратит работу на данном заводе?

906. У Григория в понедельник шесть уроков: три по математике и три по русскому языку. Он наудачу пропустил два из них (необязательно подряд) для прохождения медицинской комиссии. Какова вероятность того, что оба пропущенных урока — по математике?

907. В сборнике билетов по физике всего 30 билетов, в 6 из них встречается вопрос по механике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по механике.

908. В сборнике билетов по географии всего 25 билетов, в 12 из них встречается вопрос, касающийся Евразии. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос, касающийся Евразии.

909. В сборнике билетов по истории всего 20 билетов, в 7 из них встречается вопрос по XVII веку. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопрос по XVII веку.

910. В сборнике билетов по математике всего 40 билетов, в 8 из них встречается вопрос по тригонометрии. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопрос по тригонометрии.

911. В чемпионате по гимнастике участвуют 36 спортсменок: 6 из Германии, 3 из Франции, остальные — из России. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из России.

912. В соревнованиях по метанию копья участвуют 4 спортсмена из Германии, 6 спортсменов из Дании, 11 спортсменов из Швеции и 9 — из Греции. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Дании.

913. На семинар приехали 5 учёных из Норвегии, 3 из России и 4 из Финляндии. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что пятым окажется доклад учёного из России.

914. На чемпионате по прыжкам в длину выступают 16 спортсменов, среди них 8 прыгунов из России и 6 прыгунов из Бразилии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что третьим будет выступать прыгун из Бразилии.

915. В среднем из 1200 лампочек, поступивших в продажу, 6 неисправны. Найдите вероятность того, что одна случайно выбранная для контроля лампочка исправна.

916. В среднем из 1500 телевизоров, поступивших в продажу, 30 имеют дефект. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля телевизор без дефектов.

917. В среднем из 2000 утюгов, поступивших в продажу, 8 имеют дефект. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля утюг без дефектов.

918. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

919. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет все четыре раза.

920. Научная конференция проводится в 4 дня. Всего запланировано 50 докладов — первые три дня по 14 докладов, остальные в четвёртый день. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора Н. окажется запланированным на последний день конференции?

921. Конкурс певцов проводится в течение пяти дней. Всего заявлено 40 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день 12 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится во второй день конкурса?

922. Перед началом первого тура чемпионата по фехтованию участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате соревнуются 36 спортсменов, среди которых 8 участников из России, в том числе Василий Петров. Найдите вероятность того, что в первом туре Василий Петров будет фехтовать с каким-либо спортсменом из России.

923. Карточки с цифрами от 1 до 4 наудачу извлекают из мешка и кладут по порядку. Какова вероятность того, что карточку с цифрой 3 извлекут последней?

924. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 12 очков. Результат округлите до сотых.

925. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 4 очка. Результат округлите до сотых.

926. В мастерской собирают компьютеры. В среднем на 50 качественных компьютеров приходится семь компьютеров со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что компьютер, выбранный наугад из числа собранных в этой мастерской, окажется качественным. Результат округлите до сотых.

927. В конкурсе юных чтецов участвуют 12 человек: трое мальчиков, остальные девочки. Порядок выступлений определяется жребием. Найдите вероятность того, что первой будет выступать девочка.

928. Для зачёта по геометрии было составлено 50 задач, из них повышенного уровня — 12. Какова вероятность того, что наудачу взятая задача будет задачей повышенного уровня?

929. В корзине 20 шаров, из них 15 — белые, остальные — красные. Какова вероятность того, что наудачу взятый из корзины шар — красный?

930. У Максима есть монеты достоинством 1 рубль — 12 штук, 2 рубля — 5 штук, 5 рублей — 3 штуки, 10 рублей — 4 штуки. Наугад он достаёт одну монету и подбрасывает её. Какова вероятность того, что выпадет орёл пятирублёвой монеты?

931. Школьная научно-практическая конференция проводится в 6 дней. Всего запланировано 64 доклада — первые два дня по 20 докладов, остальные распределены поровну между третьим, четвёртым и пятым днями. В последний день запланировано награждение победителей. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад Васи П. окажется запланированным на предпоследний день конференции?

932. На улице неправильно припарковано 48 автомобилей, среди которых автомобиль Маши. Эвакуатор выбрал случайным образом и вывез на штрафстоянку 12 автомобилей. Какова вероятность, что автомобиль Маши не вывезли на штрафстоянку?

933. В первый день чемпионата по шахматам каждый участник играет одну партию, соперники определяются жеребьёвкой. Всего в чемпионате соревнуются 46 шахматистов, среди которых 19 участников из России, в том числе Андрей Васильев. Найдите вероятность того, что в первый день Андрей Васильев будет играть с каким-либо спортсменом из России.

934. В книге 400 страниц, из них на 48 есть картинки. Школьник открывает книгу на наудачу выбранной странице. Какова вероятность того, что на открытой странице не будет картинки?

935. В классе 20 человек, из них три Светы и пять Дим. Директор вызвал наугад одного из учеников. Какова вероятность, что вызванного ученика зовут Света или Дима?

936. На чемпионате мира по фигурному катанию участвуют 80 спортсменов, среди них 12 — из России, 8 — из Китая. Порядок выступлений определяется жребием. Найдите вероятность того, что 17-м будет выступать спортсмен из России.

937. У Петра очень много тетрадей: часть из них в линию, а остальные — в клеточку. При этом из 15 тетрадей в среднем 9 в клеточку. Найдите вероятность того, что наугад взятая тетрадь — в линию.

938. В одном из магазинов в среднем из каждых 50 ноутбуков 19 бракованных. Какова вероятность того, что Владимир, купивший ноутбук наугад, приобрёл бракованный товар?

939. Мама сказала Ване купить 1 упаковку мороженого, но забыла уточнить — сливочного или пломбира. В магазине с системой самообслуживания стояло 9 упаковок пломбира и 11 — сливочного мороженого. Ваня выбрал 1 упаковку наудачу. Какова вероятность того, что он купил сливочное мороженое?

940. На остановке стояло 16 автобусов и 9 троллейбусов. Какова вероятность того, что Оля, выбравшая транспорт наугад, села в автобус?

941. В шкафу у Людмилы Аркадьевны лежало 80 пакетиков чая, из них 32 с чёрным чаем, 14 с белым, 12 с красным, а остальные пакетики — с зелёным чаем. Какова вероятность того, что наудачу взятый пакетик — с зелёным чаем?

942. В среднем на каждые 75 страниц без опечаток в новом словаре приходится 25 страниц с опечатками. Какова вероятность того, что на наугад открытой странице есть опечатки?

943. Среди посетителей парикмахерской в среднем на 26 новых клиентов приходится 14 клиентов, которые там уже когда-либо стриглись. Найдите вероятность того, что в пятницу последним будет обслуживаться клиент, посещавший эту парикмахерскую раньше.

944. В концерте школьной самодеятельности выступают по очереди 6 восьмиклассников, 7 девятиклассников, 8 десятиклассников и 4 одиннадцатиклассника. Порядок выступлений определяется жребием. Какова вероятность того, что четвёртым не будет выступать девятиклассник?

945. На витрине магазина с системой самообслуживания стоит 96 упаковок йогурта, из них 21 — с клубничной начинкой, 31 — с малиновой, 15 — с банановой. Артём взял наудачу 1 упаковку йогурта. Какова вероятность того, что это йогурт с клубничной или банановой начинкой?

946. На курсы по английскому языку записалось 25 человек. Их разбили на 5 групп: в первой — 7 человек, во второй — 6 человек, а в остальных группах участников поровну. Какова вероятность того, что Василий Пончиков, записавшийся на курсы, попадет в пятую группу?

Повышенный уровень 1 (C1, C2)

§ 5. Алгебра и начала анализа (C1)

5.1. Уравнения. Системы уравнений

5.1.1. Логарифмические и показательные уравнения

Решите систему уравнений (947—952):

947. $\begin{cases} \log_{0,5}\left(\dfrac{y}{x}\right) + \log_2(y+1) = \log_2 3, \\ 4^{(x+y)} \cdot 4^y - 2^{y^2} = \log_{0,2} 1. \end{cases}$

948. $\begin{cases} x^y = 2^6, \\ \log_2 x = y - 1. \end{cases}$

949. $\begin{cases} y^{2\log_y x+1} - 4y^2 - 3y = 0, \\ \log_x(2xy) - \log_x 2 = \log_y x^2. \end{cases}$

950. $\begin{cases} y^2 - \log_3 x^y = y, \\ x^{y+1} - 3^{12} \cdot x = 0. \end{cases}$

951. $\begin{cases} 4^{(x-y)^2+x} = 4^{x+1}, \\ 5^{x+y-1} = 25. \end{cases}$

952. $\begin{cases} 3^{2x+1} - 3 \cdot 2^y = 231, \\ 2 \cdot 3^x - 2^{\frac{y}{2}+1} = 14. \end{cases}$

Решите уравнение (953—955):

953. $\dfrac{\log_2^2(x-5) + \dfrac{1}{2}\log_2(x-5)^2 - 20}{\log_x(x-6)} = 0.$

954. $\log_2(6-x) \cdot \log_3(2x+4) + 3 = \log_2(6-x) + 3\log_3(2x+4).$

955. $\log_3(2-x) \cdot \log_2(3x+7) + 4 = 4\log_3(2-x) + \log_2(3x+7).$

5.1.2. Тригонометрические уравнения

Решите уравнение (956—960):

956. $5\sin 6x + 4 = 2\sin 12x + 5\cos 6x.$

957. $\dfrac{\cos x - 1}{\cos x} + 2\operatorname{ctg} x \cdot \sin x = 0.$

958. $3\operatorname{tg} x \cdot \cos x - \dfrac{2\sin x + 1}{\sin x} = 0.$

959. $\dfrac{2\sin 2x}{\operatorname{ctg} x} + 3\cos^2 x = 1 - 2\cos x.$

960. $8 - 4\sin^2 x = \sin 2x \operatorname{ctg} x - 9\cos x.$

Решите уравнение (961–968):

961. $\dfrac{2\sin^2 x + 11\sin x - 6}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} x} = 0.$

962. $\dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{1 - \operatorname{tg} x} = 0.$

963. $\dfrac{\operatorname{tg}^3 x - 1}{\cos^2 x - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0.$

964. $\dfrac{\operatorname{ctg}^5 x + 1}{\sin^2 x - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0.$

965. $\dfrac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\sqrt{-\cos x}} = 0.$

966. $\dfrac{12\cos^4 x - \cos 2x - 3}{\sqrt{\sin x}} = 0.$

967. $\dfrac{2\cos^2 x - 2\cos x + \sqrt{2} - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 0.$

968. $\dfrac{4\sin^2 x - 4\sin x + 2\sqrt{3} - 3}{\sin^2 x - 3\cos^2 x} = 0.$

969. а) Решите уравнение $2\cos^2 x - 2\sin 2x + 1 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

970. а) Решите уравнение $(2\sqrt{3} - 4)\cos^2 x - (2\sqrt{3} + 1)\sin 2x + 4 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

971. а) Решите уравнение $\dfrac{1 - \cos^2 2x}{\operatorname{tg} x} + 2\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x = 3\cos x \cdot \sin 2x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

972. а) Решите уравнение $2\sin^2 x + \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

973. а) Решите уравнение $\dfrac{\cos x}{\cos^2 \frac{x}{2}} + 3\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right) = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[3\pi, 4\pi]$.

974. а) Решите уравнение $\dfrac{\cos x}{\sin^2 \frac{x}{2}} - 4\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - 1\right) = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[6\pi; 7\pi]$.

5.1.3. Иррациональные уравнения

Решите уравнение (975–978):

975. $\sqrt{(\sqrt{x+3}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+3}+2)^2 - 7} = 3.$

976. $\dfrac{\sqrt{4x^2+14x-98}}{8x+2} = \dfrac{\sqrt{4x^2+14x-98}}{2x-7}.$

977. $(2x-5)\sqrt{2x^2-9x+4} + 10 = 4x.$

978. $(x+1)\sqrt{3x^2+17x+10} - 4 = 4x.$

5.1.4. Комбинированные уравнения

Решите уравнение (979–980):

979. $\log_3(x^2-2x+2) - \log_{0,3} 3^{x^2-2x+1} = 0.$

980. $\log_4(x^2-4x+5) + \log_{0,4} \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0.$

Решите систему уравнений (981–989):

981. $\begin{cases} 5^{3x+4y} - 25^{2x-3y} = 0, \\ \sqrt{12-2x+19y} + \sqrt{x-9y+2} = 5. \end{cases}$

982. $\begin{cases} \log_{13x+10}(4-2x-y) = \log_{(13x+10)^2}(16-8y-16x), \\ \operatorname{ctg}(5y+3x-7)\cdot\operatorname{tg}(2+4x-y) = 1. \end{cases}$

983. $\begin{cases} 2^{3y-x+3} + 2^{4+3y-x} = 6, \\ \sqrt{x-8y+3} = 2x - y + 1. \end{cases}$

984. $\begin{cases} 2^{y+2x-1} + 4^{y+2x-1} = 6, \\ \sqrt{y+3} = 1 + \sqrt{5-x}. \end{cases}$

985. $\begin{cases} 9^{3x-2y} = 6 + 27^x \cdot 9^{-y}, \\ \sqrt{y} - \sqrt{x-2} = 1. \end{cases}$

986. $\begin{cases} \lg(2+y) + 2\lg 2 = \lg 2x, \\ \sqrt{y^2+2} = x + y - 4. \end{cases}$

987. $\begin{cases} 3^{2y+3x+1} + 3^{3-2y-3x} = 82, \\ \sqrt{22-5x+4y} = 2-2y-3x. \end{cases}$

988. $\begin{cases} \sqrt{7y-4x+2} = x-3y-3, \\ 2^{x-3y-2} + 2^{3y-x+4} = 5. \end{cases}$

989. $\begin{cases} 2^{3x-2y-3} + 2^{y-2x-4} = 1, \\ \sqrt{\dfrac{2^x}{2^y}+4} + 2^{y-2x} = 2^{3x-2y+1} + 6. \end{cases}$

Решите уравнение (990—994):

990. $\log_{\operatorname{tg} x}(\sin 2x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x \cdot \cos x + 1) = 0.$

991. $\log_{\operatorname{ctg} x}(\sin 2x + \operatorname{ctg} x \cdot \sin x + 1) = 0.$

992. $|\log_4(|x|+3)| = |x|.$

993. $\dfrac{\log_2 x}{\log_3|x-10|} - \dfrac{1}{2\cdot\log_x 2} = 0.$

994. $\dfrac{6\cos 2x - 8\cos x + 7}{(6\cos x - 1)\sqrt{-\sin x}} = 0.$

Решите систему уравнений (995—996):

995. $\begin{cases} 5x - 2^y = 3 + \sqrt{5x-x^2}, \\ y - \log_2(x^2-1) = 0. \end{cases}$

996. $\begin{cases} y^2 + 3^x = 4 + \sqrt{y^2-y+3}, \\ x - \log_3(1-y) = 0. \end{cases}$

Решите уравнение (997—998):

997. $\log_3^2(3x^2+x+1) - \log_{\frac{1}{9}}(9x^2+3x+3) = 18{,}5.$

998. $\log_5(15+\sqrt{x-5}) + \log_{\sqrt{x-5}+15} 25(\sqrt{x-5}+15) = 4.$

Решите систему уравнений (999—1018):

999. $\begin{cases} 2^{\sqrt{x^2-6x-23}} = 6 - \sqrt{x^2-6x-23}, \\ \log_3 x = y. \end{cases}$

1000. $\begin{cases} 3^{\sqrt{x^2-7x-7}} = 5 - 2\sqrt{x^2-7x-7}, \\ \log_2 x = y. \end{cases}$

1001. $\begin{cases} x\log_2(xy) - x^2 = -10, \\ \log_2 x + \log_2 y = -3. \end{cases}$

1002. $\begin{cases} 9x^6 + 6 - 8\sin y = 4x^4 + 3x, \\ 24x^3 - \dfrac{26}{81} - 8\sin y = 4x^4 + 3x. \end{cases}$

1003. $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 = 62, \\ x + y + xy = 11. \end{cases}$

1004. $\begin{cases} x^2 + y^2 + x^2y^2 - 8xy = 20, \\ x + y + xy = 14. \end{cases}$

1005. $\begin{cases} 36^{2x+1} + 16 \cdot 4^{2x-1} = 24 \cdot 12^{2x}, \\ \sin y = -x. \end{cases}$

1006. $\begin{cases} 49^{2x-1} + 81 \cdot 9^{2x-3} = 42 \cdot 21^{2x-2}, \\ \cos y = x. \end{cases}$

1007. $\begin{cases} 4x + y = 4\sqrt{xy} - 16, \\ 16x^2 + y^2 = 8xy + 64. \end{cases}$

1008. $\begin{cases} x + 9y = 6\sqrt{xy} - 25, \\ x^2 + 81y^2 = 18xy + 25. \end{cases}$

1009. $\begin{cases} x^2 + 4x + 2\sqrt{x(x+4) - 1} = 9, \\ 4\sin y \cos y = x. \end{cases}$

1010. $\begin{cases} x(2x - 5) + \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = -1, \\ \cos^2 y - \sin^2 y = x. \end{cases}$

1011. $\begin{cases} y - \cos x = 0, \\ (6\sqrt{\cos x} - 1)(5y + 4) = 0. \end{cases}$

1012. $\begin{cases} y - \sin x = 0, \\ (8\sqrt{\sin x} - 1)(3y - 4) = 0. \end{cases}$

1013. $\begin{cases} y - \cos x = 0, \\ (1 - 5\sqrt{\cos x})(3y - 8) = 0. \end{cases}$

1014. $\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ (2 - 3\sqrt{\sin x})(5y - 4) = 0. \end{cases}$

1015. $\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ (3\sqrt{\sin x} - 2)(6y - 3) = 0. \end{cases}$

1016. $\begin{cases} 2y + 3\cos x = 0, \\ (\ln(\cos x) + 1)(y - 1) = 0. \end{cases}$

1017. $\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ (\ln|\sin x| - 2)(2\sin y - 1) = 0. \end{cases}$

1018. $\begin{cases} y - \cos x = 0, \\ (\sqrt{\cos x} - 3)(2\sin y - \sqrt{2}) = 0. \end{cases}$

Решите уравнение (1019–1020):

1019. $\left(3^{2x+2} - 28 \cdot 3^x + 3\right) \cdot \sqrt{9 - 4x^2} = 0.$

1020. $\left(2^{2x+3} - 17 \cdot 2^x + 2\right) \cdot \sqrt{16 - 4x^2} = 0.$

Решите систему уравнений (1021–1022):

1021. $\begin{cases} 4^{2x} - 2 \cdot 4^{x+1} + 12 = 0, \\ \sin y = x. \end{cases}$

1022. $\begin{cases} 9^{2y} - 3 \cdot 9^{y+1} + 72 = 0, \\ \cos x = y. \end{cases}$

Решите уравнение (1023–1024):

1023. $(\log_3 x + \log_x 3 + 2)(\log_3 x - \log_{3x} x) = 6.$

1024. $(\log_2 x + 2\log_x 2)(\log_2 x - 2\log_x 2) = 3.$

Решите систему уравнений (1025–1038):

1025. $\begin{cases} \dfrac{2x-2}{x-y} - \dfrac{3y}{x+y} = 3, \\ \dfrac{6x-6y}{x-1} + \dfrac{5x+5y}{y} = 7. \end{cases}$

1026. $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{y+1} - \dfrac{3y-1}{x+1} = 2, \\ \dfrac{3y+3}{3x-1} + \dfrac{2x+2}{3y-1} = 1. \end{cases}$

1027. $\begin{cases} 3\sin y - \cos^2 y + 6\cos x = 0, \\ 2\sin^2 x + 5\cos x = 4. \end{cases}$

1028. $\begin{cases} 2\sin^2 y + 9\cos y - 3\sin x = 0, \\ 2\cos^2 x - 5\sin x = 5. \end{cases}$

1029. $\begin{cases} \dfrac{2x+5y}{2y} + \dfrac{y-2x}{x} = 2{,}5, \\ x|y| + x^2 + y^2 = 1 + 2x. \end{cases}$

1030. $\begin{cases} \dfrac{3x-y}{y} + \dfrac{3y+4x}{x} = -3, \\ x|y| + x^2 - y^2 - 3 = 2x. \end{cases}$

1031. $\begin{cases} (x+2)^2 + \sqrt{x^2 + 4x + 19} = 57, \\ y^2 = x - 1. \end{cases}$

1032. $\begin{cases} x^2 - \sqrt{x^2 - x + 10} = x + 2, \\ y^2 = x - 2. \end{cases}$

1033. $\begin{cases} 2\cos x - \sqrt{y+1} = 0, \\ 2^{2\sin x} + 4\sqrt{2} = 2^{\sin x+2} + 2^{\sin x+\frac{1}{2}}. \end{cases}$

1034. $\begin{cases} |x - 2\sqrt{2}| - 2\sin y = 0, \\ 3^{\operatorname{ctg} y+1} + 8 = 3^{1-\operatorname{ctg} y}. \end{cases}$

1035. $\begin{cases} (\log_x y + 2)(\log_y x - 1) = -2, \\ (x+1)^2 + (2y+1)^2 = 2x + 4y + 7. \end{cases}$

1036. $\begin{cases} (\log_x y - 6)(\log_y x - 1) = 2, \\ \log_x y - \log_2 x = 3. \end{cases}$

1037. $\begin{cases} 25^x = 30 - 5^x; \\ 6\sqrt{3}\cos y = x + 2. \end{cases}$

1038. $\begin{cases} 9^x = 3^x + 72; \\ 2\sqrt{3}\sin y = x + 1. \end{cases}$

Решите уравнение (1039–1042):

1039. $(4\cos^2 x - 12\cos x + 5)\sqrt{-7\sin x} = 0.$

1040. $(6\sin^2 x - 11\sin x + 4)\sqrt{-5\cos x} = 0.$

1041. $\dfrac{4\cos^2 x - 3}{\log_5(-\operatorname{tg} x)} = 0.$

1042. $(2\cos^2 x - 5\cos x - 3)(1 - \log_2(-\sin x)) = 0.$

Решите систему уравнений (1043–1044):

1043. $\begin{cases} x^2 - x + 1 = x + 1, \\ \cos x = 1. \end{cases}$

1044. $\begin{cases} x^2 - x + 4 = 4(2x + 1), \\ \sin x = 0. \end{cases}$

Решите уравнение (1045–1055):

1045. $\dfrac{\log_8^2(x-3) + \log_8 \dfrac{1}{(x-3)^5} + 6}{\sqrt{x - 100}} = 0.$

1046. $\dfrac{1 - 5\sin x + 2\cos^2 x}{\sqrt{\cos x}} = 0.$

1047. $\dfrac{4 - 5\cos x - 2\sin^2 x}{\sqrt{\sin x}} = 0.$

1048. $\dfrac{2^{3\sqrt{x}} - 7\cdot 2^{2\sqrt{x}-1} + 7\cdot 2^{\sqrt{x}-1} - 1}{\sqrt{3x - 1}} = 0.$

1049. $\dfrac{3^{3x^2}-13\cdot 3^{2x^2-1}+13\cdot 3^{x^2-1}-1}{\sqrt{x^2-x}}=0.$

1050. $\dfrac{8\cos^2 x+2\sin x-7}{\sqrt{3\cos x+2\sqrt{2}}}=0.$

1051. $\dfrac{12\sin^2 x+4\cos x-7}{\sqrt{2-3\sin x}}=0.$

1052. $\dfrac{2^{(2+\sqrt{2})\cos x}-2^{\sqrt{2}\cos x}-2^{2\cos x+2}+4}{\sqrt{(2\sin x-1)(1-2\cos x)}}=0.$

1053. $\dfrac{25^{\sin x}+5^{\sin x+1}-6}{\sqrt{(2\cos x-1)(\sqrt{3}-2\sin x)}}=0.$

1054. $\sin 12x-1=(|\sin 2x|-\cos 6x)^2.$

1055. $\cos 6x-1=(|\cos x|-\sin 4x)^2.$

Решите систему уравнений (1056–1057):

1056. $\begin{cases} \left(\dfrac{3}{5}\right)^{4\cos^2 x}=\dfrac{2}{5}-5^{1-y^2}, \\ \dfrac{5^{3-2y^2}-25\frac{1}{5}\cdot 5^{1-y^2}+1}{\sqrt{-\operatorname{tg} x}}=0. \end{cases}$

1057. $\begin{cases} 6^{y^2-2}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4\sin^2 x}=\dfrac{5}{3}, \\ \dfrac{6^{2y^2-4}-36\frac{1}{6}\cdot 6^{y^2-2}+6}{\sqrt{5\sin x+1}}=0. \end{cases}$

1058. а) Решите уравнение $\sqrt{1+\dfrac{1}{\cos x}}=\operatorname{tg} x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right].$

1059. а) Решите уравнение $\sqrt{2}-\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right]$.

1060. а) Решите уравнение
$\sqrt{\cos^2 5x-10\cos 5x+25}-\sqrt{(7\cos 5x-10)^2}=-8$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right)$.

1061. а) Решите уравнение $\sqrt{\sin^2 3x-6\sin 3x+9}-\sqrt{(5\sin 3x-8)^2}=-7$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi;\frac{5\pi}{2}\right)$.

1062. Решите уравнение $(8\cos^2 x+2\sin x-7)\log_{\frac{5\pi}{2}-x}\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=0$.

1063. а) Решите уравнение $(5\sin^2 x+4\cos x-4)\ln(x-7)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

1064. а) Решите уравнение $4^{3\cos^2 x-2\sin x-2}=1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right]$.

1065. а) Решите уравнение $9^{2\sin^2 x+\cos x-1}=1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[4\pi;5\pi]$.

1066. а) Решите уравнение $16^{\sin 2x+\frac{1}{2}}-9\left(16^{\sin x}\right)^{\cos x}+2=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi;\frac{2\pi}{5}\right]$.

1067. а) Решите уравнение $9^{2\cos 2x+0,5}-28\cdot 9^{2\cos^2 x-1}+9=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{12}\right)$.

§ 6. Геометрия (С2)

6.1. Стереометрия

6.1.1. Пирамида

1068. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны рёбра: $AB = \sqrt{3}$, $SC = 2\sqrt{10}$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой MN, где M — середина ребра AS, а точка N делит ребро BC в отношении $1:2$.

1069. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны рёбра: $AB = \sqrt{3}$, $SC = 2\sqrt{2}$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой CN, где N — середина ребра AS.

1070. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ угол между ребром SA и плоскостью основания равен $\frac{\pi}{3}$. Найдите угол между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды, если α проходит через точку A и середину ребра SC параллельно диагонали BD.

1071. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Через сторону основания AB и середину бокового ребра SE проведено сечение. Найдите тангенс угла между прямой AE и плоскостью проведённого сечения.

1072. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Через сторону основания AB и середину бокового ребра SD проведено сечение. Найдите синус угла между прямой AD и плоскостью проведённого сечения.

1073. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ высота DH равна стороне основания. Точка K — середина бокового ребра DA. Найдите угол наклона прямой KH к плоскости основания пирамиды.

1074. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ высота SH в два раза меньше диагонали основания. Точка K делит боковое ребро SA в отношении $1:2$, считая от вершины A. Найдите угол наклона прямой KH к плоскости основания пирамиды.

1075. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ все рёбра равны 4. Найдите расстояние между прямыми AB и SC.

1076. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания $ABCDEF$ равны 3, а боковые рёбра равны 5. Найдите угол между прямыми SE и AF.

1077. Дан правильный тетраэдр, в который вписана сфера радиуса r. Найдите отношение $\frac{r}{R}$, где R — радиус сферы, описанной около тетраэдра, вершинами которого являются точки пересечения высот граней исходного тетраэдра.

1078. Дан правильный тетраэдр, около которого описана сфера радиуса R. Найдите отношение $\frac{R}{r}$, где r — радиус сферы, вписанной в тетраэдр, вершинами которого являются точки пересечения биссектрис граней исходного тетраэдра.

1079. Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $PABC$ равна 6, а ребро $AP = \sqrt{28}$. Точка N делит высоту PO пополам. Найдите $\angle OAN$.

1080. Высота PO правильной треугольной пирамиды $PABC$ равна $\sqrt{108}$, а сторона её основания ABC равна 6. Точка N делит высоту PO в отношении 2 : 1, считая от точки P. Найдите $\angle BNO$.

1081. В правильной треугольной пирамиде сторона основания составляет $\frac{1}{3}$ бокового ребра. Найдите величину двугранного угла между боковыми гранями.

1082. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 4, а угол BFD равен 60°, где F — середина SC. Найдите высоту пирамиды.

1083. В правильном тетраэдре $SABC$ точки M и N делят ребро SB на три равные части. Найдите угол между плоскостями AMC и ANC.

1084. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна боковому ребру, точки M и N делят ребро SC на три равные части. Найдите угол между плоскостями AMD и AND.

1085. В сферу объёмом 36π вписана правильная шестиугольная пирамида. Расстояние от центра сферы до основания пирамиды равно 1. Найдите объём пирамиды.

1086. В сферу объёмом 36π вписана правильная восьмиугольная пирамида. Расстояние от центра сферы до основания пирамиды равно 1. Найдите объём пирамиды.

1087. Ребро правильного тетраэдра равно $4\sqrt{2}$. Определите радиус шара, касающегося всех рёбер тетраэдра.

1088. Шар радиуса $3\sqrt{2}$ касается всех рёбер правильного тетраэдра. Определите длину рёбер этого тетраэдра.

1089. В правильной треугольной пирамиде $ABCS$ ребро основания AB равно боковому ребру $AS = 4$. Точка K является серединой апофемы боковой грани BCS. Найдите угол между прямыми BK и AC.

1090. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите угол, образованный гранями SAB и SCB.

1091. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, точка K — середина ребра SB. Найдите расстояние от точки B до плоскости AKC.

1092. Сторона основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 4, а её высота равна 2. Найдите расстояние от прямой BC до боковой грани SAD.

1093. Сторона основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 3, а её боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 30°. Найдите расстояние от прямой BC до боковой грани SAD.

1094. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $4\sqrt{3}$. Через вершину основания проведено сечение, параллельное противоположной стороне основания и перпендикулярное противоположной боковой грани пирамиды. Сечение наклонено к плоскости основания пирамиды под углом, тангенс которого равен $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Найдите объём пирамиды.

1095. В правильном тетраэдре со стороной $\sqrt{2}$ найдите длину отрезка, соединяющего середины несмежных рёбер.

1096. Правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$, все рёбра которой равны 4, касается треугольной пирамиды $KSBC$ общей гранью SBC. $SK \parallel AB$, $KB = 4$. Найдите KO, если известно, что O — центр основания пирамиды $SABCD$.

1097. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC все рёбра равны 6. Грань SBC является основанием пирамиды $KSBC$, которая пересекается с $SABC$ только по грани SBC. Ребро SK параллельно высоте треугольника ABC, опущенной из вершины A. $SK = 3\sqrt{3}$. Найдите AK.

6.1.2. Призма. Параллелепипед

1098. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 12$, $AD = 16$, $CC_1 = 9$. Найдите угол между плоскостями BDD_1 и AB_1D_1.

1099. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 3$, $AD = 4$, $CC_1 = 9$. Найдите угол между плоскостями ABC и A_1DB.

1100. В основании прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, $\angle ACA_1 = \operatorname{arcctg} 2$, $\angle DBD_1 = \operatorname{arcctg} 4$, $CC_1 = 1$. Найдите объём параллелепипеда.

1101. В основании прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, $\angle ACA_1 = \operatorname{arcctg} 3$, $\angle DBD_1 = \operatorname{arcctg} 4$, $CC_1 = 2$. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

1102. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$. Известно, что $\angle ABC = \frac{\pi}{6}$ и $AB = CC_1$. Найдите угол между плоскостями ABC и ADF, где F — середина ребра BB_1.

1103. Грань $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадратом со стороной 2, а пространственная диагональ параллелепипеда равна $2\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью $A_1B_1C_1D_1$ и плоскостью ADC_1.

1104. Грань $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадратом со стороной 3, а пространственная диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{21}$. Найдите угол между плоскостью $A_1B_1C_1D_1$ и плоскостью ADC_1.

1105. Основанием прямого параллелепипеда является ромб. Плоскость, проведённая через одну из сторон нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания, образует угол, равный 60°, с плоскостью основания, а полученное сечение имеет площадь $5\sqrt{3}$. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

1106. Определите объём правильной четырёхугольной призмы, если её диагональ образует с боковой гранью угол 30°, а сторона основания равна $3\sqrt{2}$.

1107. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC, в котором $AC = 3$, $BC = 4$, $AB = 5$. Высота призмы равна $2\sqrt{6}$. Найдите MN, где M — середина CC_1, а N — середина AB.

1108. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием $AB = 10$. Найдите расстояние между прямой CC_1 и прямой, проходящей через точку A и параллельной прямой CM_1, где M_1 — середина стороны A_1B_1.

1109. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 5, найдите расстояние от точки C до прямой D_1E_1.

1110. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 7, найдите расстояние от точки B до прямой D_1C_1.

1111. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 6, найдите расстояние от точки A до прямой E_1D_1.

1112. В правильной четырёхуголной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 4, а боковые рёбра — 3. Найдите угол между прямыми BD и AD_1.

1113. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 4, точки K и M лежат на серединах боковых рёбер AA_1, BB_1 соответственно, а точка L лежит на середине ребра A_1C_1. Найдите косинус угла между прямой BB_1 и плоскостью KLM.

1114. В призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны $\sqrt{3}$, угол между боковым ребром AA_1 и высотой AN нижнего основания призмы ABC равен 30° и проекция точки A_1 на плоскость ABC лежит на высоте AN. Точки K и M лежат на рёбрах A_1C_1 и A_1B_1 соответственно, при этом $2A_1M = MB_1 = 2A_1K = KC_1$. Найдите площадь сечения призмы AKM.

1115. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 8, высота равна 3. Найдите косинус угла между плоскостями B_1DF_1 и ED_1C.

1116. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 8, высота равна 5. Найдите косинус угла между плоскостями CEB_1 и AE_1C_1.

1117. Дана правильная треугольная призма, диагональ боковой грани которой составляет с боковым ребром угол 60°. Найдите угол между скрещивающимися диагоналями смежных боковых граней призмы.

1118. Дана правильная треугольная призма со стороной основания, равной 4, боковым ребром, равным $8\sqrt{2}$. Найдите косинус угла между диагональю боковой грани и плоскостью смежной боковой грани.

1119. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано $AB = 2$ и $BC = 4$. На ребре AA_1 выбрана точка K так, что $A_1K = 4$, а на ребре BB_1 — точка L так, что $B_1L = 3$. Найдите площадь сечения, проходящего через точки K, L и D_1.

1120. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием является прямоугольный треугольник с катетами $AB = 9$, $AC = 12$. $A_1B = 6$ является высотой призмы. Найти угол между плоскостями A_1B_1B и B_1BC.

1121. В призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием является ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 6$ и $BD = 8$. H — точка пересечения диагоналей ромба. Высота призмы $C_1H = 3$. Найдите угол между плоскостями A_1CD и DCC_1.

19. Зак. № 6

6.1.3. Куб

1122. Точка O лежит на ребре DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка P является точкой пересечения диагоналей грани $ABCD$. $DO : DD_1 = 1 : 5$. Найдите косинус угла между прямой OP и прямой, содержащей диагональ куба, выходящую из вершины C.

1123. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K лежит на ребре AA_1, точка M лежит на ребре D_1C_1, длина ребра $BC = 10$. Найдите косинус угла между прямой KM и диагональю куба, которая выходит из вершины B, если $AK : KA_1 = 2 : 3$, $D_1M : MC_1 = 7 : 3$.

1124. На ребре CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P — середина этого ребра. Найдите синус угла между прямой C_1P и диагональной плоскостью AA_1C_1C.

1125. На ребре AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка Q — середина этого ребра. Найдите синус угла между прямой C_1Q и диагональной плоскостью AA_1C_1C.

1126. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны равны $3\sqrt{2}$. Найдите площадь сечения AB_1D_1.

1127. Центры каждой грани куба являются вершинами выпуклого многогранника. Найдите его объём, если диагональ куба равна 6.

1128. Центры каждой грани куба являются вершинами выпуклого многогранника, объём которого равен 4,5. Найдите площадь поверхности куба.

6.1.4. Конус

1129. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник. Определите градусную меру угла сектора, являющегося развёрткой боковой поверхности этого конуса.

1130. Развёрткой боковой поверхности конуса является полукруг. Определите градусную меру угла при вершине осевого сечения этого конуса.

1131. Диаметр и хорда AB основания конуса равны соответственно 24 и 16, а высота конуса равна $\sqrt{125}$. Найдите тангенс угла между плоскостью основания конуса и плоскостью сечения конуса, проходящей через вершину конуса и хорду AB.

1132. Диаметр и хорда AB основания конуса равны соответственно 26 и 24. Тангенс угла между образующей и основанием конуса равен 8. Найдите тангенс угла между плоскостью основания конуса и плоскостью сечения конуса, проходящей через вершину конуса и хорду AB.

1133. На окружности основания конуса радиуса 4 отмечены точки A, B и симметричные им относительно центра окружности точки C, D. Найдите угол между плоскостью, проходящей через вершину конуса и прямую

AB, и плоскостью,проходящей через вершину конуса и прямую CD, если $AB = 4$ и длина образующей равна 5.

1134. В окружности основания конуса радиуса 3 проведены две равноотстоящие от центра основания хорды AB и BC. Точка O — вершина данного конуса. Найдите угол между плоскостями AOB и BOC, если $\angle ABC = 90°$ и высота конуса равна 4.

6.1.5. Цилиндр

1135. В цилиндре отрезок AB является диаметром нижнего основания и равен 10. Точка C лежит на окружности верхнего основания цилиндра и одновременно принадлежит осевому сечению цилиндра, перпендикулярному отрезку AB. Найдите косинус угла между плоскостью ABC и плоскостью основания цилиндра, если отрезок BC равен 13.

1136. В цилиндре отрезок AB является диаметром нижнего основания. Точка C лежит на окружности верхнего основания цилиндра и одновременно принадлежит осевому сечению цилиндра, перпендикулярному отрезку AB. Найдите радиус основания цилиндра, если косинус угла между плоскостью ABC и плоскостью основания цилиндра равен 0,225, а отрезок BC равен 41.

6.1.6. Шар

1137. На шаровой поверхности лежат все вершины треугольника ABC. Точка O — центр шара. Найдите угол между прямой AO и плоскостью треугольника, если $AB = AC = 10$, $BC = 12$, $AO = 12{,}5$.

1138. На шаровой поверхности лежат все вершины равнобедренной трапеции $ABCD$, у которой меньшее основание BC равно боковой стороне, а острый угол равен 60°. Точка O — центр шара. Найдите угол между прямой AO и плоскостью трапеции, если большее основание трапеции равно радиусу шара.

1139. Дан шар с центром в точке O и два круга с площадями 12 и 16, образованные сечениями шара параллельными плоскостями. Точка O является центром большего из кругов, на окружности меньшего из кругов взяли точку A. Найдите угол между прямой OA и плоскостью, содержащей больший круг.

1140. Дан шар с центром в точке O и два круга с площадями 100 и 200, образованные сечениями шара параллельными плоскостями. Найдите расстояние между этими плоскостями, если одна из них содержит точку O.

6.1.7. Комбинации тел

1141. В цилиндр с высотой 10 вписан конус (основание конуса совпадает с нижним основанием цилиндра, вершина конуса — середина верхнего основания цилиндра), угол между пересекающимися образующими цилиндра и конуса равен 30°. Найдите площадь всей поверхности конуса.

1142. Около шара описан усечённый конус, площадь одного основания которого в 4 раза больше площади другого. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

1143. Около шара описана правильная усеченная четырёхугольная пирамида, у которой площадь одного основания в 9 раз больше площади другого. Найдите угол наклона боковой грани к плоскости основания.

1144. В цилиндр высотой 2 и радиусом основания 1 вписана правильная восьмиугольная призма $ABCDEFKMA_1B_1C_1D_1E_1F_1K_1M_1$. Точка P — середина бокового ребра E_1E. Найдите угол между прямыми BD_1 и PA.

Повышенный уровень 2 (С3)

§ 7. Алгебра и начала анализа

7.1. Уравнения. Системы уравнений

7.1.1. Иррациональные уравнения

Решите уравнение (1145–1146):

1145. $x(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{8}$.

1146. $3x-4x^3=\sqrt{1-x^2}(1-4x^2)$.

7.1.2. Комбинированные уравнения

Решите уравнение (1147–1148):

1147. $\log_{2x+2}\sin x=\log_{11+10x-x^2}\sin x$.

1148. $\log_{3x+14}\cos x=\log_{20+8x-x^2}\cos x$.

7.2. Неравенства

7.2.1. Логарифмические и показательные неравенства

1149. Найдите все значения t, при каждом из которых наименьшее из двух чисел $b=2^{-6t}-5\cdot2^{-2t}\left(2^{-t}+2^{2t}\right)$ и $c=-2^{6t}+6\cdot2^{3t}+7$ не меньше -9.

1150. Найдите все значения $x < 2$, при каждом из которых хотя бы одно из двух чисел $a = \log_2(6x - 2x^2) + \log_{\frac{1}{4}}(x-3)^2$ и $b = \dfrac{1}{\log_4(5x+6x^2)}$ больше 1.

1151. Найдите такие значения x, при которых положительным является ровно одно из двух чисел $a = \lg x + \dfrac{7}{\ln x^3} + \log_x 7$ и $b = (2\log_3 x - 1 - 3\log_x 9)(\log_3 x + 3)$.

1152. Найдите все значения $x > 2$, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $a = 2\log_x 27 - \log_3 81x$ и $b = \log_3^2 x^3 - 28\log_3 x$ больше -3.

Решите неравенство (1153–1186):

1153. $\frac{1}{2}\log_{4+x}(x^2+2x+1) + \log_{-x-1}(-x^2-5x-4) \leqslant 3$.

1154. $\log_{1-x}(1+x-2x^2) + \frac{1}{4}\log_{1+2x}(x^2-2x+1)^2 \geqslant -1$.

1155. $\log_{x-2}\log_3\dfrac{x+3}{x-3} > \log_{\frac{1}{x-2}}\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x-3}{x+3}$.

1156. $\log_{x+6}\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x-5}{x+5} < \log_{\frac{1}{x+6}}\log_2\dfrac{x+5}{x-5}$.

1157. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} < 6$.

1158. $7^{\log_7^2 x} + x^{\log_7 x} < 14$.

1159. $\dfrac{\log_{3x-1} 27}{\log_{3x-1}(-27x)} \leqslant \dfrac{1}{\log_3\log_{\frac{1}{3}} 3^x}$.

1160. $\dfrac{\log_{2x+8} 4}{\log_{2x+8}(-4x)} \leqslant \dfrac{1}{\log_2\log_{\frac{1}{2}} 2^x}$.

1161. $\log_3\left((5^{-x^2}-7)(5^{-x^2+9}-1)\right) + \log_3\dfrac{5^{-x^2}-7}{5^{-x^2+9}-1} - \log_3(5^{2-x^2}-1)^2 > 0$.

1162. $\log_7\dfrac{3^{-x^2}-8}{3^{26-x^2}-3} + \log_7\left((3^{-x^2}-8)(3^{26-x^2}-3)\right) > \log_7(3^{3-x^2}-1)^2$.

1163. $\dfrac{\log_{4x-5} 64}{\log_{4x-5}(-256x)} \leqslant \dfrac{1}{\log_4\log_{\frac{1}{4}} 4^x}$.

1164. $\dfrac{\log_{2x+4} 8}{\log_{2x+4}(-16x)} \leqslant \dfrac{1}{\log_2\log_{\frac{1}{3}} 3^x}$.

1165. $\log_2\Big(\big(2^{-x^2}-4\big)\big(2^{-x^2+1}-1\big)\Big)-\log_2\dfrac{2^{-x^2}-4}{2^{-x^2+1}-1}\geqslant\log_2\big(2^{5-x^2}-8\big)^2.$

1166. $\log_{0,5}\Big(\big(2^{-x^2}-8\big)\big(2^{-x^2+2}-1\big)\Big)-\log_{0,5}\dfrac{2^{-x^2+2}-1}{2^{-x^2}-8}\geqslant$

$\geqslant\log_{0,5}\big(2^{1-x^2}-2\big)^2.$

1167. $\log_5^2(x-8)-6\log_5(\sqrt{x-8})\geqslant 4-25(x-8)\cdot\big(\log_5(x-8)-4\big).$

1168. $\log_3^2(x-2)+3(x-2)\cdot\big(2\log_3\sqrt{x-2}+3\big)\geqslant 7\log_3(x-2)+30.$

1169. $7^{18}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{5\sqrt{x}}>1.$

1170. $5^{33}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{3x}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{2\sqrt{x}}>1.$

1171. $\dfrac{2^{2|x-3|}+4}{5}<2^{|x-3|}.$

1172. $\dfrac{5^{2|x+1|}+5}{6}<5^{|x+1|}.$

1173. $\log_3\log_4\dfrac{4x-1}{x+1}<\log_{\frac{1}{3}}\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{x+1}{4x-1}.$

1174. $\log_9^2 x\geqslant\log_3^2\sqrt{1-\frac{x}{4}}.$

1175. $3^{2x}-2^{x+\frac{3}{2}}\geqslant 2^{x+\frac{5}{2}}+9^{x-1}.$

1176. $5^{x+\frac{2}{3}}-8^x\geqslant 2^x\cdot 4^{x-1}+5^{x-\frac{1}{3}}.$

1177. $\log_{|2x+3|}(x^2-10x+9)\geqslant 2.$

1178. $\log_{|3x+2|}(x^2-5x+4)\geqslant 2.$

1179. $4\log_{x+1}(1-x^2)-\frac{1}{4}\log_{x+1}^2(x-1)^4\geqslant 5.$

1180. $2\log_{x+2}(4-x^2)-\frac{1}{4}\log_{x+2}^2(x-2)^2\geqslant 3.$

1181. $5\log_{11}(x^2-x-6)\leqslant 6+\log_{11}\dfrac{(x-3)^5}{x+2}.$

1182. $7\log_9(x^2+3x-10)\leqslant 8+\log_9\dfrac{(x-2)^7}{x+5}.$

1183. $\dfrac{\log_2(x^2-5x)}{\log_2(x^2)}\leqslant 1.$

1184. $\log_{x^2}(x-5)^2+\log_{(x-5)^2}x^2\leqslant 2.$

1185. $\log_{\frac{1}{5}}\left(7^{1+\log_{35}x}-\dfrac{1}{5^{1+\log_{35}x}}\right)\geqslant\log_{35}x-1.$

1186. $\log_{\frac{1}{2}}\left(3^{1+\log_{6}x}-\dfrac{1}{2^{1+\log_{6}x}}\right)\geqslant 1+\log_{6}x.$

Решите систему неравенств (1187–1188):

1187. $\begin{cases} 3^{2(x-2)}-4\cdot 3^{x-2}+3\geqslant 0,\\ \log_{16}2^x<1.\end{cases}$

1188. $\begin{cases} 2^{2(3-x)}+3\cdot 2^{3-x}-4\leqslant 0,\\ \log_{81}3^x<1.\end{cases}$

Решите неравенство (1189–1203):

1189. $\log^3_{(x-4)}(x+4)-\dfrac{4}{9}\log^2_{(x-4)}(x+4)^3+5\log_{(x-4)}(x^2-16)>7.$

1190. $\dfrac{1}{27}\log^3_{(x+2)}(x-2)^3-\dfrac{1}{5}\log^2_{(x+2)}(x-2)^5+8\log_{(x+2)}(x^2-4)<12.$

1191. $\dfrac{\log_{x+2}(x-2)+1}{\log^2_{x+2}(x-2)+1}\cdot\left(\log_{x+2}(x-2)+\log_{x-2}(x+2)\right)\geqslant$
$\geqslant\log_{x^2-4}(x^2+4x+4).$

1192. $\dfrac{\log_{x+3}(x-3)+2}{\log^2_{x+3}(x-3)+2}\cdot\left(\log_{x+3}(x-3)+2\log_{x-3}(x+3)\right)\geqslant$
$\geqslant 1{,}5\log_{x^2-9}(x^2+6x+9).$

1193. $\dfrac{x^2-4x+3}{3\cdot 25^x+5\cdot 3^x-5^x\cdot 15^x-15}\geqslant 0.$

1194. $\dfrac{6^x-3\cdot 2^x-0{,}5\cdot 3^x+1{,}5}{x^2+3x+2}\leqslant 0.$

1195. $3^{x^2+2x}-9^{x+2}-3^{x^2}\cdot 2^x+81\cdot 2^x\geqslant 0.$

1196. $7^{x^2+1}-7^{2x+1}-5^x\cdot 7^{x^2-2x}\cdot 7+7\cdot 5^x\leqslant 0.$

1197. $\log_2(x-1)-\log_2(x+1)+\log_{\frac{x+1}{x-1}}2>0.$

1198. $\log_{0,5}(x-3)-\log_{0,5}(x+3)+\log_{\frac{x-3}{x+3}}2>0.$

1199. $\dfrac{1}{4}x^{2+\log_2 x}-2\log_2^2 x-4\log_2 x+4\leqslant 0.$

1200. $\dfrac{1}{81}x^{3+\log_3 x}-2\log_3^2 x-6\log_3 x+7\leqslant 0.$

1201. $\log_5\left(\dfrac{81^{x^2}-2\cdot 3^{2x^2}+4}{4\cdot 2^{2x^2}-2^{2+x^2}+4}\right)+3^{-\log_3(2\cdot 2^{x^2}-1)}>2^{-\log_2(3^{2x^2}-1)}.$

1202. $\log_{0,5}\dfrac{4^{|x|+1}-4\cdot 2^{|x|+1}+5}{(2^{\sqrt{x}+3}-2)^2+1}+\dfrac{1}{2\cdot 2^{|x|}-1}>(8\cdot 2^{\sqrt{x}}-1)^{-1}.$

1203. $\log_{\frac{1}{3}}\big((x+2)(x+4)\big)+\log_3(x+4)>-3\log_{27}13.$

Решите систему неравенств (1204–1205):

1204. $\begin{cases}\log_3^2(x-5)^2-4\log_3(15-3x)\leqslant 4,\\ 4^x-2^{x+4}\leqslant 6\cdot 2^x+75.\end{cases}$

1205. $\begin{cases}4^x-2^{x+1}\leqslant 2^x+10,\\ \log_2(8-x^2)+\log_2(x^2-20x+100)\geqslant 2\log_2(10-x).\end{cases}$

Решите неравенство (1206–1207):

1206. $\dfrac{1}{1+\log_3 x}+\log_x 27\geqslant\dfrac{11}{6}.$

1207. $\log_{5-2x}(5+8x-4x^2)+\log_{2x+1}(25-20x+4x^2)\leqslant 4.$

Решите систему неравенств (1208–1211):

1208. $\begin{cases}9^x\geqslant\sqrt{3}\cdot 3^x+18,\\ \log_2(x^3-7x^2+14x-8)\leqslant 1+\log_2(x-1).\end{cases}$

1209. $\begin{cases}12^x\cdot 4^x+\dfrac{1}{12}>4^{2x-1}+3^{x-1},\\ \log_{1-x}(x^2-5x+4)\geqslant 2.\end{cases}$

1210. $\begin{cases}9^x\leqslant 3^{x+2}-20,\\ 3\cdot 2^{1+x\sqrt{2}}\geqslant 4^{x\sqrt{2}}+8.\end{cases}$

1211. $\begin{cases}4^{x-0,5}+15<11\cdot 2^{x-1},\\ 5^{\frac{x\sqrt{6}}{3}}+125<30\cdot 5^{\frac{x\sqrt{6}}{6}}.\end{cases}$

7.2.2. Рациональные неравенства

Решите неравенство (1212–1213):

1212. $3x(x-1)+9\geqslant\dfrac{8}{x+1}-\dfrac{5}{x-2}.$

1213. $x(x+1)+4<\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{4}{x-1}.$

7.2.3. Иррациональные неравенства

Решите неравенство (1214–1217):

1214. $\dfrac{\sqrt{x^2+0,5x}}{x}+2\leqslant\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{-x}.$

1215. $\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{2x}+1,5\leqslant\dfrac{\sqrt{4x^2-4x+1}}{-2x}.$

1216. $\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x}}-x\geqslant 2.$

1217. $\sqrt{(x-1)^2+\dfrac{8}{x-1}}\leqslant x+1.$

7.2.4. Неравенства, содержащие модуль

Решите систему неравенств (1218–1219):

1218. $\begin{cases}\dfrac{1}{|(x-1)(x-2)|}+\dfrac{1}{|(x-2)(x-3)|}+\dfrac{1}{|(x-3)(x-4)|}\geqslant 0{,}3,\\ |2x-5|\geqslant 3.\end{cases}$

1219. $\begin{cases}\dfrac{1}{|(x-2)(x-3)|}+\dfrac{1}{|(x-3)(x-4)|}+\dfrac{1}{|(x-4)(x-5)|}\geqslant \dfrac{3}{40},\\ |2x-7|\geqslant 3.\end{cases}$

Решите неравенство (1220–1221):

1220. $\dfrac{4}{|x+2|-2}\geqslant |x|.$

1221. $\dfrac{3}{|x+2|-1}\geqslant |x+1|.$

7.2.5. Комбинированные неравенства

1222. Найдите все значения x, при каждом из которых выполняются оба неравенства $\dfrac{(\sin x-2)\sqrt{16-x^2}}{\log_2(x+1)-4}>0$ и $\dfrac{\log_3^2(x+2)-2\log_3(x+2)}{3\sqrt{x-2}-x}\leqslant 0$ и все найденные значения x удовлетворяют неравенству $21x-2x^2-40\geqslant 0$.

1223. Найдите все значения x, при которых наибольшее из двух чисел $p=\dfrac{\log_3(3^x-1)}{x-1}$ и $q=27^{2x}-3\cdot 9^{\frac{3x^2+2}{x}}+1$ не меньше 1.

Решите неравенство (1224–1225):

1224. $\dfrac{2^{\sqrt{x-1}}-3^{\log_{\frac{1}{3}}\frac{x}{4}}}{|x+1|-|x-13|}\geqslant 0.$

1225. $\dfrac{5^{\log_{25}x}-0{,}5^{-\sqrt{x-3}}}{|x+2|-|2x-23|}\leqslant 0.$

Решите систему неравенств (1226–1227):

1226. $\begin{cases}\dfrac{|3x+175|(x-22)(5-x)}{\sqrt[4]{17x-x^2-42}}\geqslant 0,\\[2mm] \dfrac{\sqrt{11-x}\cdot\sqrt[6]{(11-x)^3}}{|11-x|}\geqslant 0.\end{cases}$

1227. $\begin{cases} \dfrac{|7x-123|(x+15)(x-8)}{-\sqrt[4]{x^2+3x-28}} \geqslant 0, \\ \dfrac{\sqrt{x+9}\cdot\sqrt[6]{(x+9)^3}}{|x+9|} \geqslant 0. \end{cases}$

Решите неравенство (1228–1236):

1228. $\sqrt{x-2}\cdot\log_{|x-3|}(x^2+x-5) \leqslant 0.$

1229. $\dfrac{\log_{|x-2|}(3x+3-x^2)}{\sqrt{3x-x^2}} \leqslant 0.$

1230. $\sqrt{\log_{11}(x^2-17x+67)}\cdot(17^x\log_{17}x+17-17\log_{17}x-17^x) \leqslant 0.$

1231. $\sqrt{\log_5(x^2-5x+7)}\cdot(9^x\log_9 x+9-9\log_9 x-9^x) \leqslant 0.$

1232. $\dfrac{\log_7(2x+15)}{\log_7(x+6)} \geqslant \dfrac{2\log_{3x-2}|x|}{\log_{3x-2}(x+6)}.$

1233. $9^{(x+5)^2(x-7)}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{(x^2-2x-35)^3}} \leqslant 1.$

1234. $\dfrac{19^{x-1}\log_{19}x+1-\log_{19}x-19^{x-1}}{\sqrt{\log_{13}(x^2-19x+49)}} \leqslant 0.$

1235. $\dfrac{3^x+7\cdot 3^{2-x}-16}{\sqrt{16^x-121}} > 0.$

1236. $\dfrac{4^x-7-2^{3+x}+7\cdot 2^{3-x}}{\sqrt{3^x-4}} \leqslant 0.$

Решите систему неравенств (1237–1240):

1237. $\begin{cases} \dfrac{x^{\frac{1}{2}\log_2 x}}{4} \geqslant 2^{\frac{1}{4}(\log_2 x)^2}, \\ \dfrac{27x^2+6x-1}{3x-8} > 0. \end{cases}$

1238. $\begin{cases} \dfrac{3x^2-2{,}6x+\dfrac{23}{150}}{x\sqrt{2}-\sqrt{3}} \geqslant 0, \\ (x^2-1)^{2+x} > (x^2-1)^{5x-3}. \end{cases}$

1239. $\begin{cases} \operatorname{arctg} 4x > 1 \\ \log_2(7^x+5)+\log_{7^x+5}8 \leqslant 4. \end{cases}$

1240. $\begin{cases} 10\operatorname{arcctg}\dfrac{4\sqrt{5}x}{15} \geqslant 7, \\ \log_3(5^x+16)-6\log_{5^x+16}3 > 1. \end{cases}$

Повышенный уровень 3 (С4, С5)

§ 8. Алгебра и начала анализа (С5)

8.1. Уравнения. Системы уравнений

8.1.1. Логарифмические и показательные уравнения

1241. Найдите все решения уравнения $k\log_3 x^2+3k\log_x 3+\log_x 9 = 2k+8$ для тех значений параметра k, при которых уравнение имеет два корня, максимальный из которых в 3 раза больше минимального.

1242. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых уравнение $\sqrt{5p-1}\log_3 x+p\log_x 9-5\log_x 3-7+5p = 0$ имеет ровно $5p^2-6p+2$ различных корней.

8.1.2. Тригонометрические уравнения

1243. Найдите наибольшее целое отрицательное значение m, при котором уравнение $\sin^2 x - 5m = 4 - 2m\sin^2 x$ не имеет корней.

8.1.3. Рациональные уравнения

1244. При каких значениях параметра p графики функций $y = x^{10} - px^2 + 4x + p$ и $y = x^{10} - 4x^2 + px$ имеют ровно две точки пересечения?

1245. Найдите все значения параметра a, при которых число различных корней уравнения $\dfrac{3a+8-(a-1)x}{x+1} = a^2+2a+3$ равно числу различных корней уравнения $(a-3)x^2-(a-2)x-1=0$.

1246. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\dfrac{6+a}{3+x} - \dfrac{6-a}{3-x} = \dfrac{6}{a}$ имеет единственное решение.

1247. Найдите все значения параметров a и b, при которых уравнение $x^3-5x^2+7x = a$ имеет ровно 2 различных корня, которые будут являться корнями уравнения $x^3-13x+b=0$.

1248. При каких значениях параметра a система
$\begin{cases} x^2-(3a-1)x+2a^2-a \leqslant 0, \\ ax = 1 \end{cases}$ имеет решение?

1249. При каких значениях параметра a система
$\begin{cases} x^2-(4a-1)x+3a^2-a < 0, \\ ax = 4 \end{cases}$ имеет решение?

1250. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^3-2ax^2+a^2x-3=0$ имеет ровно 2 корня.

1251. Найдите все значения a, при которых уравнение
$\frac{x^3}{a^2} - \frac{2x^2}{a} + x - 3 = 0$ имеет ровно 2 корня.

1252. При каких значениях параметра a система
$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2, \\ y^2 = (x-3)^2 \end{cases}$ имеет единственное решение?

1253. При каких значениях параметра a система
$\begin{cases} \left(x+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}, \\ y^2 = (x-3)^2 \end{cases}$ имеет единственное решение?

8.1.4. Иррациональные уравнения

1254. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$\sqrt{16-x} + \sqrt{a^2-x} = 16 + a$ имеет единственное решение.

1255. При каких значениях m уравнение $2\sqrt{1-m(x+2)} = x+4$ имеет единственный корень?

1256. При каких значениях p уравнение $3\sqrt{2x+p} = 1 + 3x$ имеет два различных корня?

1257. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{8x^2-9a} = a - 3x$ имеет ровно один корень.

8.1.5. Уравнения, содержащие модуль

1258. Найдите сумму всех целых значений параметра p, меньших 7, при которых график функции $y = -px^4 + |p-4|x^2$ пересекается с линией $y = 0$ ровно в трех точках.

1259. Найдите все значения параметра a, при котором уравнение
$\sqrt{a}x^3 - \left|a^3 + 2 - |2a^2 + a|\right|x = 0$ имеет ровно один корень.

1260. Найдите все значения параметра a, при котором уравнение
$\sqrt{a}x^6 - |a^3 + 4 - |4a + a^2||x^4 = 0$ имеет ровно один корень.

1261. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$a(a+3) - a|x-4| = (8x - x^2 - 10)\cdot|x-4| - (8x - x^2 - 10)(a+3)$ имеет ровно 2 корня.

1262. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$a(a+2) - a|x-2| = (4x - x^2 - 1)\cdot|x-2| - (4x - x^2 - 1)(a+2)$ имеет ровно 2 корня.

1263. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$|x+a| + \left||x-3| - 4\right| = 1$ имеет ровно два корня.

1264. Найдите все значения b, при каждом из которых уравнение
$|x-b| + \left||x+2| - 5\right| = 2$ имеет ровно два корня.

1265. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $8x - \left|6x - |x+a|\right| = 16|x-3|$ имеет хотя бы один корень.

1266. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $5x - \left|4x + |3x-a|\right| = 13|x-2|$ имеет хотя бы один корень.

1267. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} a(y-1) = 2-2|x|, \\ x^2+y^2 = 9 \end{cases}$ имеет ровно 3 различных решения.

1268. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} x^2+y^2 = a^2, \\ y+a^2 = |x+1| \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

1269. Найдите все значения параметра b, при которых система $\begin{cases} x^2+4y^2 = b, \\ b+2y = |x-1| \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

1270. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} x^2+(y-a)^2 = a^2, \\ |x^2-3| = y \end{cases}$ имеет более 4 решений.

1271. Найдите все положительные значения параметра a, при которых система $\begin{cases} x^2+(y+a-8)^2 = a^2, \\ |4-x^2| = y \end{cases}$ имеет ровно 4 решения.

1272. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x-1| + x^2 + (a-3)x + 6 = a$ имеет решение.

8.1.6. Комбинированные уравнения

1273. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $9^{4x^2-4ax-6a-8} - 8 = \left|\dfrac{a+3}{2x-a}\right|$ принадлежит отрезку $[-1; 1]$?

1274. Даны два уравнения: $\dfrac{x^4 - 2(3+p)x + (2p^2-3p+4)}{x^2+p} = x^2 - p + 17$ и $\dfrac{p+2}{3^{x-300}} = \dfrac{\sqrt{x+3}}{p+2}$. Значение параметра p выбирается таким образом, что число различных корней второго уравнения в сумме с числом $p+1$ даёт число различных корней первого уравнения. Найдите все значения параметра $p \neq -2$, удовлетворяющие условию, и сумму корней первого уравнения при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

1275. Даны два уравнения: $\sqrt{4(p+1)x - 8p - 12} = 2x + p - 1$ и $\left(2 + 2^{\frac{p+2}{p-1}}\right)^x = 21 - 6x$. Значение параметра p выбирается так, что оба уравнения имеют смысл и число $0{,}5(p+2)$ равно произведению числа различных корней первого уравнения и числа различных корней второго уравнения. Решите второе уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

1276. Найдите количество всех решений системы уравнений
$$\begin{cases} x^3 + xy = 7, \\ x + \sqrt{\dfrac{y-1}{x^2}} = 1 + \sqrt{y-1}. \end{cases}$$

1277. Найдите количество всех решений системы уравнений
$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + xy + 9x + y = 0, \\ \left(\dfrac{(x+1)^2}{y+5}\right)^{-0,5} = \sqrt{y+5} - x. \end{cases}$$

Решите систему уравнений (1278–1281):

1278. $\begin{cases} 3^{\sin^2 \pi x} + \sqrt{1 + \cos \pi y} = 1, \\ (x^3 - 4xy + y^2 - y - 2x + 1)\log_3(11 + 41x - 12x^2) = 0. \end{cases}$

1279. $\begin{cases} \cos^2 \dfrac{\pi x}{2} + \sqrt{1 - \cos \pi y} = 0, \\ (y^3 - 2xy + x^2 - 2x + 1)\sqrt{17y + 10 - 6y^2} = 0. \end{cases}$

1280. $\begin{cases} x^2 - 4xy + 2y^2 + 2x + 1 = 0, \\ \sqrt{z+x} + \sqrt{z-y} = 1 + \sqrt{2y - y^2}. \end{cases}$

1281. $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y + 1 = 0, \\ \sqrt{y+z} + z = \sqrt{2x+z} + \sqrt{3 + 2y - y^2}. \end{cases}$

1282. Найдите число решений системы
$$\begin{cases} y = 6 + \sqrt{4x - x^2}, \\ x^2 y \cdot 2^{3x} + 64(x+1)^3 = \left(2^x(x+1)\right)^3 + 64x^2 y. \end{cases}$$

1283. Сколько решений имеет система уравнений?
$$\begin{cases} 3x^2 - 4 \cdot 3^{y+1}(x-1) = 3x, \\ x^3 + y + 3 = 0. \end{cases}$$

1284. Сколько решений имеет следующая система уравнений?
$$\begin{cases} 2x^2 - 6x \cdot 4^y + 4x = 3 \cdot 4^{y+1}, \\ \dfrac{1}{(x+3)^3} - |y - 2| = 0. \end{cases}$$

1285. Найдите количество решений системы уравнений
$$\begin{cases} y^2(x+1)^2 + 1 = x, \\ 0,5y + \dfrac{\log_2(x^2 - 4x + 4)}{2y} = \dfrac{\lg(4x-8)}{\lg 4}. \end{cases}$$

1286. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \dfrac{1}{9}, \\ x + y = 1 - \sqrt{4xy + 3y - 7x - 5}. \end{cases}$

1287. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 4x^3 + 9x^2 - 12x + 2 = 0, \\ \dfrac{y}{x+1} + 5 = 2^{x-y}\sqrt{x^2(x+5) + 4(2x+1)} - xy \end{cases}$$

имеет два решения.

1288. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} x^{-y}\sqrt{4x^3 - 3x - 1} = xy - 1, \\ 2x^3 - 3x^2 - 12x - 3 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1289. Определите количество решений системы уравнений

$$\begin{cases} y^3 - 2y^2 - 3^x \cdot y + 2 \cdot 3^x = 0, \\ 9 \cdot 27^{x-1} - 2 \cdot 9^x + 3^{x+1} = 5 - y^2. \end{cases}$$

1290. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5^{\cos x} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{\cos y}, \\ \log_2(\sin x - \cos y) + \log_2(\sin x + \cos y) = -1. \end{cases}$$

1291. Найдите количество решений системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = 0, \\ 3 + (9 - 2x)^{x-y} = y + \sqrt{x^3 - x^2 - 5x - 3}. \end{cases}$$

1292. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (\sqrt{2})^{\cos x} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\sin y}, \\ \log_{\sqrt{2}}(\sin x + \cos y) - \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\cos x - \sin y) = 2. \end{cases}$$

1293. Найдите количество всех решений системы уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 = 0, \\ y^2 - (\operatorname{tg} x + \sqrt{8 - x^2})y + \sqrt{8 - x^2} \cdot \operatorname{tg} x = 0. \end{cases}$$

Решите уравнение (1294–1296):

1294. $f\big(g(x) + 1\big) - g\big(f(x) + 3\big) = 6$, если $f(x) = x^4 - 32x + 50$,

$$g(x) = \begin{cases} -4, & x \geqslant 5, \\ \dfrac{2}{5 - x} + \log_8(3x - 4), & x < 5. \end{cases}$$

1295. $f(g(x)) + g(1 - f(x)) = f(x) + 2$, если известно, что $f(x) = \dfrac{x+8}{x^2+2}$ и $g(x) = \begin{cases} -x^2 - 6x - 10, \ x \leqslant -4, \\ 2 - x, \ -4 < x \leqslant 2, \\ \dfrac{x+1}{2} + \log_3(x+6) - 1, \ x > 2. \end{cases}$

1296. $g(f(x) - 44) + f(g(x)) = 8$, если известно, что $f(x) = -x^6 + 32x + 5$ и $g(x) = \begin{cases} 3, \ x \leqslant 1, \\ \log_2 x + (x-1)^3, \ x > 1. \end{cases}$

1297. Для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{40}$ верны условия $a_{n+1} = f(a_n)$, $a_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots, 39$. Найдите $a_5 + a_8 + a_{11}$, если известно, что $a_{40} = 1$ и $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \text{ если } x < 3, \\ 3\cos x - 2, \text{ если } x \geqslant 3. \end{cases}$

1298. Для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$ верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \ldots, 98$. Найдите $a_{33} + a_{40}$, если известно, что $a_{99} = 0$, а

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+8}{x-2}, \text{ если } x < 2, \\ \sqrt[5]{\dfrac{x-5}{x-1}} + \sqrt{\dfrac{8x-7}{2x+3}}, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$$

1299. Для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{26}$ верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \ldots, 25$. Найдите $a_3 + a_4 + a_5$, если известно, что $a_{26} = 0$ и

$$f(x) = \begin{cases} 4\cos\dfrac{\pi x}{12} - 2, \text{ если } x < 0, \\ \dfrac{32}{3x+16} - 6, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

1300. Для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$ верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots, 29$. Найдите $7a_9 - 2a_{17}$, если известно, что $a_{30} = 2$, а

$$f(x) = \begin{cases} 4 - \dfrac{8}{x+2}, \quad \text{если } x < 3, \\ 3 + \dfrac{x^2}{x+1} + \log_3\dfrac{x}{2}, \quad \text{если } x \geqslant 3. \end{cases}$$

Решите уравнение (1301—1304):

1301. $f(g(x)) + g(f(x) + f(-x)) = 5$, где $f(x) = 3^x + 2x - \ln 5$, $g(x) = \begin{cases} \ln 5, & x \geqslant -2, \\ 5^{x^2+2x-2} - 4, & x < -2. \end{cases}$

1302. $$\frac{5x^3}{5x^3 - 7x^{\frac{3}{2}} + 6} + \frac{2x^3}{5x^3 - x^{\frac{3}{2}} + 6} = x^{\frac{3}{2}}.$$

1303. $2^{x^6} + \cos(2x^2 + x) = \cos x^3 + 2^{(2x^2+x)^2}$.

1304. $x^{12} + 82\cos(10x - 21) = 82\cos(x^2) + (10x - 21)^6$.

1305. Найдите значения a, при которых уравнение
$x^4(x^2 + \sqrt{a^2 - a - 1}) + \sqrt{(8 - a)^2} + \sqrt{(27 + a)^2} - \sqrt{(8 - a)(27 + a)} = 21$
имеет единственное решение.

1306. Известно, что уравнение $px^2 + (p + 3)x + 4 = 0$ имеет хотя бы один корень. Найдите все значения параметра p, при которых число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравнения
$\dfrac{x - 1}{16 - p} = \dfrac{1}{\sqrt{x - 5} + 4}$.

1307. При каких значениях параметра a уравнение
$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 \sin 2 = 0$ имеет единственное решение?

1308. При каких значениях параметра b уравнение
$b^4 - 8b\cos(\cos x) - 9x^2 = 0$ имеет единственное решение?

1309. Решите систему уравнений $\begin{cases} xyz = 10, \\ \lg^2 x + \lg^2 y + \lg^2 z = 8,5, \\ \lg x \cdot \lg y \cdot \lg z = -4,5. \end{cases}$

1310. При каких значениях параметра k уравнение $\sqrt[4]{x^3} = x + |x - k|$ имеет ровно один корень.

1311. При каких значениях параметра a уравнение
$x^2 - \dfrac{5a}{2\cos x - 3} + 10 = 0$ имеет единственное решение?

1312. При каких значениях параметра a уравнение
$15 + 7x^2 - \dfrac{3\sin\cos x}{4a} = 0$ имеет единственное решение?

1313. При каких положительных значениях параметра a модуль разности корней уравнения $ax^2 + 2x - 2{,}25 = 0$ не больше расстояния между точками экстремума функции $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 6ax + 13a^2$?

1314. При каких положительных значениях параметра a расстояние между точками экстремума функции $f(x) = x^3 + 6x^2 - 9ax + 4a^2$ не превосходит удвоенного модуля разности корней уравнения $ax^2 + 2\sqrt{6}x - 2 = 0$?

1315. Найдите все значения a, при которых каждое из уравнений
$\sqrt{41 + 9\cos x} - a\cos x = 0$ и $|x - a| + 7|x + 2| + 5x = 0$ имеет хотя бы один корень.

1316. Найдите все значения a, при которых ни одно из уравнений
$\sqrt{145 + 24\sin x} + a\sin x = 0$ и $3x - 9|x - 1| - |x + a| = 0$ не имеет решений.

1317. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = ax + 6 + |-x^2 - 6x - 5|$ больше 2.

1318. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + 5 + |x^2 + 6x + 5|$ меньше 1.

1319. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 5|x - a^2| - 13x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

1320. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 + 5|x - a^2| - 13x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

1321. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 8x + 15|$ меньше 1.

1322. Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x)=4ax+|x^2-8x+15|$ на отрезке $[2{,}75; 5{,}25]$ меньше 1.

1323. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 3x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

1324. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 3x$ имеет хотя бы одну точку минимума.

1325. Найдите все значения a, при которых уравнение $(3a^2 - 8x(2 - x)^3)(\sin x + \sqrt{3}\cos x + a^2 - 3a + 4) = 0$ имеет корни и все корни неотрицательны.

1326. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left(\sin^2 x - 5\sin x - 2a(\sin x - 3) + 6\right)\left(\sqrt{2}a + 8x\sqrt{2x - 2x^2}\right) = 0$ имеет корни.

1327. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $[4; 16]$ значение выражения $\log_2^2 x + 2a$ не больше значения выражения $(a + 2)\log_2 x$.

1328. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $[3; 9]$ значение выражения $\log_3^2 x + a$ не больше значения выражения $(a + 1)\log_3 x$.

1329. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{x - a}{x - 6a} < 0$ выполняется при всех значениях x, таких, что $2 \leqslant x \leqslant 3$.

1330. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{x - 2a}{x + a} < 0$ выполняется при всех значениях x, таких, что $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

1331. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 2^{x+y} - 2^{2x-y} = 1 - 2^a, \\ 2^{4x} - 2^{x+3y+1} = 3 \cdot 2^{a+2y} - 2^{2y+2} \end{cases}$$ имеет единственное решение?

1332. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 2^x(y + 1)(1 - y \cdot 2^x) = a^3, \\ (1 + 2^x)(1 - y \cdot 2^x) = a \end{cases}$$ не имеет решений?

1333. Найдите значения параметра a, при которых разрешимо неравенство $\dfrac{\log^2_{\frac{4a-7}{4}} x^2 + \log_{\frac{4a-7}{4}} x^4 \cdot \log_a x + \log^2_a x}{(x-1)^2} \leqslant 0.$

1334. Найдите значения параметра a, при которых разрешимо неравенство $\dfrac{\log^2_{\frac{a+1}{108}} x^3 + \log_{\frac{a+1}{108}} x^6 \cdot \log_a x + \log^2_a x}{(x-1)^2} \leqslant 0.$

1335. Решите уравнение $\dfrac{1+4x-\sqrt{6x+15x^2}}{1+4x+\sqrt{6x+15x^2}} = 8a^3\dfrac{\sqrt{2+5x}+\sqrt{3x}}{\sqrt{2+5x}-\sqrt{3x}}$.

1336. Решите уравнение $\dfrac{1+5x-\sqrt{10x+25x^2}}{1+5x+\sqrt{10x+25x^2}} = \dfrac{1}{8}c^3\dfrac{\sqrt{2+5x}+\sqrt{5x}}{\sqrt{2+5x}-\sqrt{5x}}$.

1337. Найдите все значения параметров a и b, при которых уравнения $2x^2 - ax - 8 = 0$ и $x^3 + bx - 16 = 0$ имеют два общих корня, и найдите эти корни.

1338. Найдите все значения параметров a и b, при которых уравнения $3x^3 + bx^2 - 25 = 0$ и $x^3 - ax + 15 = 0$ имеют два общих корня, и найдите эти корни.

1339. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства $4x^2 - 4x - a^2 + 4a \leqslant 3$ удовлетворяет неравенству $ax(a - 2 + x) \geqslant 0$.

1340. Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства $x^2+(10+3a)x+2a^2+12a+16 \leqslant 0$ удовлетворяет неравенству $ax(x - 8 - a) \leqslant 0$.

1341. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $e^{x-a-2} + x^2 \leqslant a - 5x$ имеет единственное решение.

1342. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых неравенство $e^{x+b+3} + x^2 \leqslant b - 3x$ имеет единственное решение.

1343. Найдите все значения a, при которых неравенство

$\dfrac{x^2 + 4(a-1)x + 4a^2}{5 - (\cos\sqrt{15 - 2a - a^2} + 4)} > 0$ выполняется для всех $x \in (-2; 1)$.

1344. Найдите все значения a, при которых неравенство

$\dfrac{x^2 + 2(a-1)x + a^2}{3 - (\cos\sqrt{6 - a - a^2} + 2)} > 0$ выполняется для всех $x \in (-1; 1)$.

1345. Найдите все положительные значения a, при которых система $\begin{cases} (|x| - 7)^2 + (y-2)^2 = 9, \\ (x+3)^2 + (y+1)^2 = a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

1346. Найдите все положительные значения a, при которых система $\begin{cases} (x-5)^2+(|y|-8)^2=16, \\ (x+3)^2+(y-2)^2=a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

1347. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} (x-3)^2+(y-5)^2=16, \\ y=|x-a|+2 \end{cases}$ имеет ровно три различных решения.

1348. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} |y|=4-(x+5)^2, \\ (x+5)^2+y^2=a^2 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

1349. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} \sqrt{|x+1|}+\sqrt{|y+2|}=2, \\ x^2+2x+y^2+4y=25a^2-5 \end{cases}$ имеет ровно 4 решения.

1350. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} \sqrt{|x-3|}+\sqrt{|y-1|}=4, \\ x^2-6x+y^2-2y=16a^2-10 \end{cases}$ имеет ровно 4 решения.

1351. Дан многочлен $f(x)=x^2+|m-2|x+5-2m$. Известно, что $g_1(x)=x^2f\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $g_2(x)=x^2\cdot f\left(\frac{1}{x}-1\right)$. Найдите все значения параметра m, при которых число корней хотя бы двух из уравнений $f(x)=0$, $g_1(x)=0$ и $g_2(x)=0$ будет различным.

1352. Дан многочлен $f(x)=x^2-|3-m|x-m+4$. Известно, что $g_1(x)=(x-1)^2f\left(\frac{1}{x-1}\right)$ и $g_2(x)=x^2f\left(\frac{1}{x}-1\right)$. Найдите все значения параметра m, при которых число корней хотя бы двух из уравнений $f(x)=0$, $g_1(x)=0$ и $g_2(x)=0$ будет различным.

1353. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (x-a)(x^2-ax+5x-2a^2-a+6)>0, \\ x^2+a^2=36 \end{cases}$ имеет решение.

1354. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (x+a)(2x^2-5ax-x-3a^2-11a-6)<0, \\ x^2+a^2=9 \end{cases}$ имеет решение.

1355. Для каждого значения a решите уравнение $25a^2+\log_3^2 x+\arccos(x-2)-(5a-2)\log_3 x^2+4=20a.$

1356. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} \log_2(3-x-y)+2=\log_2(8-3x-5y), \\ (x-a)^2=y-x+a+9 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

1357. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x+3|+a=\sqrt{|x|}$ имеет ровно два корня.

1358. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x-2|+a=\sqrt{|x|}$ имеет ровно два корня.

1359. При каких значениях a уравнение
$x(x-2a)+\cos(\pi x+a)\ \sin a+1 = \sin(\pi x+a)\cos a - a^2$ имеет только один корень?

1360. При каких значениях b уравнение
$x(x+2b)-\cos(\pi x+b)\cos b+1=\sin(\pi x+b)\sin b-b^2$ имеет только один корень?

1361. При каких значениях параметра a уравнение
$\pi^2(x-1)^2+4a\cos(2\pi x)+4a^4=0$ имеет единственное решение?

1362. При каких значениях параметра p существует хотя бы одно число x из отрезка $[2;3]$, удовлетворяющее условию

$$\log_3(4-|\sin px|)=\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)?$$

8.2. Неравенства

8.2.1. Логарифмические и показательные неравенства

1363. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $\log_x(x-a)>2$ содержит точку $x=-a$.

8.2.2. Рациональные неравенства

1364. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $ax^2+3a>4x$ не содержит точку $x=a$.

1365. Найдите все значения a, при каждом из которых система
$\begin{cases} 2x^2+x(a-6)-5(a+4)\geqslant 0, \\ (a^2+x^2-4)(a^2+x^2-16)\leqslant 0 \end{cases}$ имеет решения.

1366. Найдите все значения a, при каждом из которых система
$\begin{cases} (a^2+x^2-9)(a^2+x^2-4x-5)\leqslant 0, \\ x^2+(a+5)x+4a+4\leqslant 0 \end{cases}$ имеет решение.

8.2.3. Иррациональные неравенства

1367. При каких значениях параметра a множество решений неравенства $2+\sqrt{x^2+ax}>x$ содержит отрезок $[4;7]$?

1368. Найдите все значения параметра a, для которых при каждом x из промежутка $(1;5]$ значение выражения x^2-3x+3 не равно значению выражения $a\sqrt{x^2-3x+6}$.

8.2.4. Неравенства, содержащие модуль

1369. При каких значениях параметра a неравенство $3-|x-a|>x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

8.2.5. Комбинированные неравенства

1370. Найдите наибольшее целое a, такое, что между числами a и $3+3^{a-2}$ есть решения неравенства
$\sqrt{\log_7(x^2-7x+13)}(12^x\log_{12}x+12-12\log_{12}x-12^x)\leqslant 0$, а сами числа a и $3+3^{a-2}$ решениями не являются.

1371. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $\dfrac{3^x-6a+3}{a-2}+\dfrac{12}{(a-2)(3^x-3+a)}\leqslant\dfrac{10a+2}{3-a-3^x}$ является отрезком длиной меньше 1.

1372. Найдите все значения a, для каждого из которых оба числа $\dfrac{1+a}{1-a}$ и $\dfrac{a+1}{a-1}+2\dfrac{a+1}{(a-1)^2}$ являются решением неравенства
$\log_{3-\sqrt{x}}\log_{0,5}(0{,}5|x-5|-1{,}5)<0$.

1373. Найдите все значения a, при каждом из которых все решения неравенства $|x-a|+|y|\leqslant 2$ являются решениями неравенства
$(y+3)(y-x+2)(x^2-8x+12-y)\geqslant 0$.

1374. Найдите все значения a, при каждом из которых все решения неравенства $|x-a|+2|y-3|\leqslant 1{,}5$ являются решениями неравенства
$(xy-6)(x+1)(2y-x-4)\leqslant 0$.

1375. Найдите, при каких значениях параметра a имеет решение система
$$\begin{cases} x^2-4x+a^2-21=0,\\ x^2-(4a-3)x+3a^2-3a\leqslant 0,\\ |x|+|a|\geqslant 4.\end{cases}$$

1376. Найдите, при каких значениях параметра a имеет решение система
$$\begin{cases} x^2+6x+a^2-40=0,\\ 2x^2+(9a-8)x+4a^2-4a\leqslant 0,\\ |x|+|a|\geqslant 6.\end{cases}$$

1377. При каких значениях a значение выражения $(\sin x)^{\log_2(\sin x)-|a|}$ больше значения выражения $2^{\log_4(1-\cos^2 x)+a(a-2)}$ при всех допустимых значениях x?

1378. Для каждого допустимого значения параметра a решите неравенство $2\log_{\sin a}(x-2)\leqslant\log_{\sin a}(5x+8)$.

1379. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4,\\ 2^{xy}=a\end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение.

1380. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} x^2 - 6(x+y) + y^2 + 9 \leqslant 0, \\ 2^{(x-3)(y-3)} = a \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение.

8.3. Функции

8.3.1. Область определения функции

1381. Найдите все значения a, при которых область определения функции $y = \left(x^{(2x+3)\log_x a} + \left(\sqrt[4]{x}\right)^{12} \cdot a^8 - x^{3+2x\log_x a} - a\left(a^5\right)^{-\log_2(0,25)}\right)^{-0,5}$ содержит ровно два целых числа.

1382. Найдите все значения a, при которых область определения функции $y = \left(a^x \cdot x^{(x+3)\log_x a} + a^{8+3\log_a x} - \left(\sqrt[3]{x}\right)^{9+6x\log_x a} - \sqrt{a^{22}}\right)^{-0,5}$ содержит ровно три целых числа.

1383. Найдите все положительные значения параметра a, при которых в области определения функции $y = \log_a\left(a^{\frac{1}{x-10}} - a^{\frac{ax}{12}+\frac{1}{x-10}-2}\right)$ есть однозначные натуральные числа и не более одного двузначного натурального числа.

1384. Найдите все натуральные значения параметра $n > 1$, при которых отрезок длины n является областью определения функции
$y = \sqrt[n]{(5n-6-x)^3 \cdot (2x-32+3n)^{7n-5}}$.

1385. Найдите все значения a, при которых оба числа
$\log_5^2 a - \dfrac{12}{\log_{5a} 125} + 10$ и $\log_5 a + 2$ принадлежат области определения функции $f(x) = \sqrt{\dfrac{(17x-66-x^2)\cdot 4\log_{625} 5^{\sqrt{x-3}}}{\sqrt{(x-5)^2}-8}}$.

8.3.2. Комбинированные задачи

1386. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых значение функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3a(a-2)x + a$ в точке минимума больше значения функции $g(x) = x^3 - 3x^2 - 3(a^2-1)x + a + 1$ в точке максимума.

1387. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых значение функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3(a-1)(3-a)x + 2a^2 - 5a + 29$ в точке минимума больше значения функции
$g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6a(1-a)x + \left(\sqrt{(2a-1)(a-2)}\right)^2$ в точке максимума.

1388. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = \sqrt{x - 2a^2 + 14a + 3} + \sqrt{x - a^2 + 2a + 21}$ не меньше 3.

1389. Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = \sqrt{2a^2 - 8a + 16 - x} + \sqrt{3a^2 + 8a + 7 - x}$ меньше 5.

§ 9. Арифметика и алгебра (С5)

9.1. Задачи на прогрессию

9.1.1. Арифметическая прогрессия

1390. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $a|x + 2| - 4a + 1 \geqslant ax(x + 4) + |x + 2|$ содержит число $-4{,}8$ и все члены некоторой конечной арифметической прогрессии с первым членом, равным 0, и отрицательной разностью.

1391. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $|\log_2(|x - 6| - a)| - a < 0$ содержит число 9,125 и все члены некоторой возрастающей конечной арифметической прогрессии с первым членом, равным 0.

1392. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $x + 4a > 5\sqrt{ax}$ содержит все члены некоторой бесконечной арифметической прогрессии, первый член которой меньше a, а разность которой равна 225.

1393. Первый, второй и пятый члены бесконечной возрастающей арифметической прогрессии принадлежат множеству $A = (1; 3) \cup (8; 10)$, а остальные члены этой прогрессии множеству A не принадлежат. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

1394. Из всех членов возрастающей арифметической прогрессии только первый и четвертый не являются решениями неравенства
$\left(\log_{x-3}(2x + 1)\right)\left(\log_{2x+1} x^2\right) \geqslant \left(\log_{x-3}(3x + 1)\right)\left(\log_{3x+1}(6{,}2x - 8{,}4)\right)$.
Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

1395. Определите все значения параметра a, при которых не менее одного члена, но не более девяти членов арифметической прогрессии с первым членом, равным $-|a| - 4{,}5$, и разностью 0,5 являются решением неравенства $5a > 4x + 2a\sqrt{5a - 4x} + 3a^2$.

1396. При каких значениях параметра $d > 0$ существует арифметическая прогрессия с разностью d, такая, что среди её членов решениями неравенства $\left(\dfrac{(4^x-5\cdot 2^x+4)(\log_2 x-2)}{\log_3 x-2}\right)\sqrt{6-x}\leqslant 0$ являются первый, второй, пятый, шестой члены и только они?

9.1.2. Геометрическая прогрессия

1397. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $x^2-(a+6)|x|+6a\leqslant 0$ содержит все члены последовательности вида $a_n=-6+b_n$, где b_n — какая-то бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с первым членом, равным 7,5, и положительным знаменателем.

1398. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $(x-2)^2-(a+2)|x-2|+2a\leqslant 0$ содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 2,9, и положительным знаменателем.

1399. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x-10)\leqslant (a+5)(|x-5|-5)$ содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 9,8, и положительным знаменателем.

1400. Первый, второй и четвертый члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии принадлежат множеству $A=\left(\frac{1}{9};\frac{1}{7}\right)\cup\left(\frac{1}{3};1\right)$, а остальные члены прогрессии этому множеству не принадлежат. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

§ 10. Геометрия (С4)

10.1. Планиметрия

10.1.1. Вписанная и описанная окружность, треугольник

1401. В треугольнике ABC высота CH и медиана CK делят угол ACB на три равных угла. Длина отрезка CO, где O — центр вписанной окружности, равна $\dfrac{3\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}$. Найдите площадь треугольника ABC.

1402. В треугольнике ABC высота CH и медиана CK делят угол ACB на три равных угла. Площадь треугольника ABC равна $1{,}5+\sqrt{3}$. Найдите радиус вписанной в треугольник ABC окружности.

1403. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом 30°.

1404. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с боковой стороной a и углом $30°$.

1405. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 20, основание 16. Вписанная окружность касается его боковых сторон в точках D и E. Найдите DE.

1406. Основание равнобедренного треугольника равно 18 см. Вписанная окружность касается его боковых сторон в точках M и K, $MK = 8$ см. Найдите периметр треугольника.

1407. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего $\triangle ABC$, взята точка R так, что RB отличается от RC на 40. Найдите RB, если расстояние от R до точки пересечения отрезков AR и BC равно 21.

1408. В треугольник ABC со сторонами 5, 7 и 9 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две бо́льшие стороны треугольника ABC. Найдите периметр отсечённого треугольника.

1409. В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 15, а радиус вписанной окружности равен 6. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

1410. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются под углом $55°$. Центр вписанной в треугольник BCD окружности лежит на AC. Найдите величину угла CDB, если $AB = AD$ и $\angle BAD = 110°$.

1411. Во вписанном в окружность четырёхугольнике $ABCD$ угол ABC в два раза больше угла между диагоналями AC и BD. Найдите величину угла DCB, если $\angle CDB = \angle BDA = 25°$.

10.1.2. Треугольник

1412. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка P, отстоящая от катетов на расстоянии $\frac{40}{11}$ и $\frac{36}{11}$. Найдите катеты AC и BC, если площадь треугольника ABC равна 30.

1413. В равнобедренном треугольнике ABC на боковых сторонах AB и BC взяты точки M и N соответственно так, что отрезок MN параллелен основанию AC. Найдите высоту трапеции $AMNC$, проведённую из точки N, если $AN = 13$, $S_{AMNC} = 60$.

1414. Найдите произведение радиусов всех вневписанных окружностей треугольника со сторонами 4, 5, 6.

1415. Найдите произведение сторон треугольника, если известно, что радиусы его вневписанных окружностей равны 9, 18 и 21.

1416. Площадь треугольника ABC равна 18. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны медианам данного треугольника.

1417. Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите площадь этого четырёхугольника, если основание треугольника 16, а боковая сторона равна 17.

1418. Высота треугольника CDE, проведённая из вершины D, в 1,4 раза больше диаметра вписанной в этот треугольник окружности. Известно, что площадь треугольника равна 84, сторона $CE = 15$. Найдите сторону CD.

1419. Дан равнобедренный треугольник ABC, где $AB = AC = 12$, $\sin\angle BAC = \frac{1}{3}$. Найдите радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности.

1420. Дан равнобедренный треугольник ABC, где $AB = AC = 8$. Высота, опущенная на боковую сторону, равна 4. Найдите BC.

1421. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC на стороне AB выбрана точка P, а на продолжении основания за точку A — точка Q так, что $\angle BQC = \angle PCA$. Найдите площадь треугольника PQC, если площадь треугольника ABC равна 13.

1422. Основания высот треугольника со сторонами 5, 6, 7 являются вершинами другого треугольника. Найдите периметр последнего.

1423. Основания высот треугольника со сторонами 4, 8 и 10 являются вершинами другого треугольника. Найдите периметр последнего.

1424. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, которое в 4 раза меньше периметра ABC. Из произвольной точки P основания AC проведены прямые PK и PL, параллельные боковым сторонам. Аналогично из некоторой точки Q стороны AC проведены прямые QT и QN ($K,T \in AB$; $L,N \in BC$). Точка O — точка пересечения PL и QT. Известно, что $AP = 2QC$ и периметры четырёхугольника $BLOT$ и треугольника POQ относятся как 7 : 4. Найдите отношение $QC : AC$.

1425. В треугольнике ABC проведены медианы CM и AN. Из некоторой точки K стороны AC проведены прямые KP и KQ соответственно, параллельные этим медианам ($P \in AB$, $Q \in BC$). Найдите соотношение, в котором CM и AN делят отрезок PQ на три части, если точка пересечения медиан O и отрезок AC лежат по разные стороны прямой, содержащей PQ (не проходящей через O).

1426. В $\triangle ABC$ на стороне BC как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону AC в точке K. K делит сторону AC на отрезки длиной 5 и 1. На стороне BC взята точка D так, что AD и BK пересекаются в точке O и $BD = 10$, $DC = 9$. Найдите длину OK.

1427. В прямоугольнике $KLMN$ меньшая сторона равна 4. Отрезок делит прямоугольник на два квадрата, в каждый из которых вписана окружность. Обе окружности лежат внутри равностороннего треугольника ABC, причём каждая сторона этого треугольника касается хотя бы одной из окружностей. Найдите AB, если точки A, B, K, L лежат на одной прямой.

1428. Треугольник $A_1B_1C_1$ получен из треугольника ABC параллельным переносом (при этом A перешло в A_1, B — в B_1). A_1 лежит на отрезке BC. Окружность проходит через те вершины треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, которые не являются их общими точками. Найдите все возможные значения длины AB, если $BC = 6$, $AC = AB$.

10.1.3. Параллелограмм. Квадрат. Ромб

1429. В параллелограмме $ABCD$ площадью $2\sqrt{3}$ высота h в два раза меньше одной из его диагоналей, и угол между этой диагональю и стороной, к которой проведена h, в 3 раза меньше угла между диагоналями параллелограмма. Найдите длину меньшей диагонали.

1430. В параллелограмме $ABCD$ угол между диагональю и основанием AD равен 60°, и угол между диагоналями в три раза больше угла между основанием AD и одной из диагоналей параллелограмма. Высота CH, проведённая к AD, равна $4\sqrt{3}$, диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Найдите OH.

1431. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC равна 8, а диагональ BD равна 4. На AC выбрана точка M таким образом, что вокруг четырёхугольника $BCDM$ можно описать окружность. Пусть N — центр окружности, описанной вокруг треугольника AMD. Найдите длину BN, если $\sin\angle ADM = \frac{1}{2}$.

1432. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC равна 18, а диагональ BD равна 6. На AC выбрана точка M таким образом, что вокруг четырёхугольника $BCDM$ можно описать окружность. Пусть N — центр окружности, описанной вокруг треугольника AMB. Найдите длину DN, если $\sin\angle ABM = \frac{1}{3}$.

1433. В параллелограмме $ABCD$ с площадью 25 сторона AB равна диагонали BD. На стороне CD взята точка K, а на продолжении стороны

BC за точку C — точка T так, что $\angle DTB = \angle KBT$. Найдите площадь треугольника BKT.

1434. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 5$, $BC = 7\sqrt{3}$, острый угол равен 30°. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAD и DCB.

1435. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 2$, $BC = 4$, $\angle BAD = 60°$. На двух его противоположных сторонах построены равнобедренные треугольники с углами, равными 120°, при вершинах M и N. Найдите расстояние MN.

1436. Через вершины A, B, C ромба $ABCD$ провели окружность, которая пересекает прямую BD в точке E. Найдите расстояние CE, если площадь ромба равна 10, $\sin\angle A = 0{,}6$.

10.1.4. Трапеция

1437. В трапеции $ABCD$ точки K и M — середины её оснований AB и CD соответственно, причём DK и BM — биссектрисы соответственно $\angle ADC$ и $\angle ABC$. Больший угол при нижнем основании равен 60°. Найдите периметр трапеции, если её высота равна $3\sqrt{3}$.

1438. В трапеции $ABCD$ точки K и M — середины оснований AB и CD соответственно, причём DK и BM — биссектрисы $\angle ADC$ и $\angle ABC$. Косинус меньшего угла при нижнем основании равен $\frac{3}{4}$. Найдите длину отрезка KM, если периметр трапеции равен 30.

1439. Основания трапеции $ABCD$ равны 18 и 12, диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, тангенс угла между боковыми сторонами равен $\frac{1}{3}$. Найдите площадь трапеции.

1440. В параллелограмме $AMPK$ биссектрисы углов при стороне AM делят сторону KP точками T и F так, что $PF : FT = 3 : 5$. Найдите PK, если $AK = 24$.

1441. В параллелограмме $AMPK$ биссектрисы углов при стороне AM делят сторону KP точками T и F так, что $PF : FT = 2 : 11$. Найдите AM, если $MP = 26$.

1442. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 10. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 2 : 3$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются прямой BC в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF.

1443. В треугольнике ABC $AB = 2\sqrt{39}$, $BC = 14$, $AC = 10$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 2 : 5$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются прямой BC в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF.

1444. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 20$, биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 2 : 3$. Найдите BC.

1445. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 40$, биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 3 : 5$. Найдите BC.

1446. В треугольнике ABC $AB = 5$, $BC = 4$, $AC = 3$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 1 : 3$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

1447. В треугольнике ABC $AB = 8$, $BC = 5$, $AC = 7$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 2 : 3$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

1448. В трапеции $ABCD$ точки K, L, M, N лежат соответственно на AB, BC, CD и DA так, что $\frac{AK}{AB} = \frac{BL}{BC} = \frac{CM}{CD} = \frac{DN}{DA} = \frac{1}{2}$. Найдите S_{KLMN}, если $\angle ADB = 30°$, $AB = BC = 6$, $\sin\angle ABD = \frac{2}{3}$, $BC \parallel AD$.

1449. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность, расстояния от центра окружности до её оснований BC и AD равны 4 и 3 соответственно, синус угла ACD равен 0,8. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого являются серединами сторон $ABCD$.

1450. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке O так, что одна из них делится в отношении $1 : 2$. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника BOC равна 8.

1451. В трапеции $ABCD$ точка N является серединой боковой стороны CD. Найдите площадь трапеции, если сторона AB равна 7 см, а расстояние от точки N до стороны AB равно 5 см.

1452. Длина общей касательной, проведённой к двум окружностям радиусами 4 и 8, равна 5. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

1453. Расстояние между центрами двух окружностей радиусами 1 и 7 равно 10. Найдите длину общей касательной, проведённой к этим окружностям.

1454. Две окружности радиусами R и r $(R > r)$ касаются в точке A. Определите сторону равностороннего треугольника, одна из вершин которого находится в точке A, а две другие лежат на разных окружностях, если $R = 5, r = 3$.

1455. Расстояние между центрами двух окружностей равно 50. Одна из окружностей имеет радиус 25, вторая — 30. Некоторая прямая пересекает меньшую окружность в точках A и B и касается большей в точке C. Найдите длину хорды AB, если $AB = 2BC$.

1456. В остроугольном $\triangle ABC$ сторона AB равна $5\sqrt{37}$, сторона BC — $10\sqrt{10}$, а высота из вершины B — 30. На прямой AC взяли точку D так, что $AD : DC = 3 : 2$. Найдите радиус окружности, описанной около $\triangle BCD$.

1457. В остроугольном $\triangle ABC$ сторона $AB = \sqrt{109}$, сторона $BC = \sqrt{101}$, а высота из вершины B — 10. На прямой AC взяли точку D так, что $AD : DC = 4 : 3$. Найдите радиус окружности, описанной около $\triangle BCD$.

1458. Две окружности с радиусами 36 и 9 внешне касательны. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в окружность, касательную к двум данным и к их общей касательной.

1459. Две окружности с радиусами 16 и 144 внешне касательны. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в окружность, касательную к двум данным и к их общей касательной.

1460. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $AB = 2$ и $AD = 1$. K — точка на прямой AB, из которой стороны AD и CD видны под одним и тем же углом, а L — точка на прямой CD, из которой под одинаковыми углами видны стороны AB и BC. Найдите площадь четырёхугольника $AKCL$.

1461. В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB в 3 раза больше стороны AD. K — точка на прямой AB, из которой стороны AD и CD видны под одинаковыми углами, а L — точка на прямой CD, из которой под одинаковыми углами видны стороны AB и BC. Найдите BC, если площадь четырёхугольника $AKCL$ равна 3.

1462. В окружность радиусом $\sqrt{5}$ вписана трапеция с основаниями 3 и 4. Найдите диагональ трапеции.

1463. В окружность радиусом $\sqrt{5}$ вписана трапеция с основаниями 1 и 4. Найдите боковую сторону трапеции.

1464. В трапеции $ABCD$ точки K, F, P и L являются точками пересечения медиан треугольников ABC, BCD, ACD и ABD соответственно. O — точка пересечения отрезков KP и FL. Через точку O проведена прямая, параллельная основаниям трапеции и пересекающая боковые стороны ны трапеции в точках M и N. Найдите длину отрезка MN, если основания трапеции равны 1 и 4.

1465. В трапеции $ABCD$ точки K, F, P и L являются точками пересечения медиан треугольников ABC, BCD, ACD и ABD соответственно. O — точка пересечения отрезков KP и FL. Через точку O проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. В каком отношении эта прямая делит высоту трапеции, если основания трапеции равны 2 и 5?

1466. Из вершины A трапеции $ABCD$ проведена биссектриса, которая пересекает диагональ BD в точке K. Найдите площадь трапеции, если $AB = 4$, $AD = 12$, $AK = 4{,}8$, $BC = 3$.

1467. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $9\sqrt{3}$. Сторона $AB = 3\sqrt{3}$, $\angle BCD = 30°$. Найдите диагональ AC.

1468. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами 8 и 15, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите площадь этого четырёхугольника.

1469. Периметр равнобедренной трапеции равен 40. В трапецию вписана окружность радиуса 4. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

1470. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, $\angle BAC = \angle CDB$. Продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке N, образуя угол $30°$. Найдите площадь треугольника BNC, если площадь трапеции равна 20.

1471. Окружность вписана в трапецию $ABCD$, площадь которой равна 27. Боковые стороны трапеции AB и DC продолжены до пересечения в точке E. Расстояния от точки E до оснований трапеции относятся как $1 : 2$. Известно, что большее основание трапеции равно 9. Найдите AB.

1472. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AB = 8$ и $DC = 5{,}5$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O под прямым углом. Найдите значение выражения $AO \cdot OC + BO \cdot OD$.

1473. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и DC диагонали AC и BD пересекаются в точке O под прямым углом. Найдите длину CD, если длина AB равна 5, а значение выражения $AO \cdot OC + BO \cdot OD$ равно 23.

1474. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна к боковой стороне AB. Найдите BC, если известно, что $AD = 25$, $AB + BC = 27$.

1475. В равнобедренной трапеции $ABCD$ отношение длин оснований $DC : AB = 3 : 5$, длина средней линии равна 8. Найдите расстояние от вершины трапеции до точки пересечения прямых, продолжающих её боковые стороны, если известно, что в трапецию можно вписать окружность.

1476. В трапеции угол между диагоналями равен 30°, и они делят острые углы трапеции пополам. Найдите площадь трапеции, если основание трапеции равно 8.

1477. В трапеции угол между диагоналями равен 45°, и они делят острые углы трапеции пополам. Найдите площадь трапеции, если основание трапеции равно 6.

10.1.5. n-угольники

1478. Вокруг правильного 23-угольника $A_1A_2...A_{23}$ с центром в точке O описали окружность, и в этот же многоугольник вписали окружность. Кроме того, на лучах OA_1, OA_2, ..., OA_{23} выбрали соответственно точки B_1, B_2, ..., B_{23} так, что

$B_1A_1 = \frac{1}{3}OA_1$, $B_2A_2 = \frac{1}{3}OA_2$, ..., $B_{23}A_{23} = \frac{1}{3}OA_{23}$. Оказалось, что $B_1B_2...B_{23}$ — также правильный 23-угольник. Найдите отношение площади 23-угольника $B_1B_2...B_{23}$ к площади кольца, ограниченного проведёнными окружностями.

1479. Вокруг правильного 29-угольника $A_1A_2...A_{29}$ с центром в точке O описали окружность, и в этот же многоугольник вписали окружность. Кроме того, на лучах OA_1, OA_2, ..., OA_{29} выбрали соответственно точки B_1, B_2, ..., B_{29} так, что

$B_1A_1 = \frac{1}{4}OA_1$, $B_2A_2 = \frac{1}{4}OA_2$, ..., $B_{29}A_{29} = \frac{1}{4}OA_{29}$. Оказалось, что $B_1B_2...B_{29}$ — также правильный 29-угольник. Найдите отношение площади кольца, ограниченного проведёнными окружностями, к площади 29-угольника $B_1B_2...B_{29}$.

10.1.6. Окружность, касательная, секущая

1480. Хорда AB и диаметр MN одной и той же окружности не пересекаются, а точка пересечения прямых AM и BN равноудалена от концов хорды AB на расстояние 3. Найдите радиус окружности, если $\angle ANM = 30°$.

1481. Отрезок CD является диаметром некоторой окружности. Через его концы C и D проведены две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках A и B, лежащих по одну сторону от прямой CD. Точка O, в которой пересекаются эти проведённые прямые, равноудалена от концов диаметра CD. Найдите радиус окружности, если длина хорды AB равна 2, а $\angle OCD = 60°$.

1482. В прямоугольном треугольнике ABC угол C — прямой, угол A равен $60°$. На стороне AB взята точка Q так, что $BQ : QA = 1 : 2$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки Q и A и касающейся прямой, содержащей сторону BC, если $QA = 6$.

1483. В прямоугольном треугольнике ABC угол C — прямой, угол A равен $60°$. На стороне AB взята точка Q так, что $BQ : QA = 1 : 2$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки Q и A, и касающейся прямой, содержащей сторону BC, если $QA = 4$.

1484. В треугольнике ABC проведена медиана AM. При этом $AB = 7$, $AC = 5$, $AM = 2$. Чему равны площади частей, на которые медиана делит треугольник?

1485. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны. Координаты точки $A\,(3;7)$, координаты точки $D\,(1;5)$. $\angle DAC = \angle DBC = 30°$. Найдите абсциссу точки C, если известно, что ордината точки B больше 6.

1486. Два вертикальных угла имеют синус, равный $\frac{\sqrt{15}}{4}$. В каждый из этих углов вписана окружность, при этом радиус одной в два раза больше радиуса второй. Расстояние между их центрами равно $12\sqrt{2}$. Найдите диаметр меньшей окружности.

1487. Две параллельные прямые пересечены третьей под углом, синус которого равен $\frac{8}{17}$. Длина отрезка третьей прямой, заключённой между двумя параллельными составляет 32. В накрест лежащие тупые углы вписаны окружности, радиус одной в 3 раза больше радиуса другой, расстояние между их центрами равно 40. Найдите радиус меньшей окружности.

1488. Радиусы окружностей S_1 и S_2, касающихся в точке A, равны 5 и 2 соответственно. Найдите длину отрезка касательной BF (F — точка касания), проведённой к S_2 из точки B окружности S_1, если известно, что $AB = 3$.

1489. Радиусы окружностей S_1 и S_2, касающихся в точке A, равны 7 и 3 соответственно. Касательная, проведённая к S_2 из точки B окружности S_1, касается окружности S_2 в точке F. Найдите AB, если $BF = 4$.

1490. На плоскости даны две окружности, касающиеся внешним образом в точке T. К этим окружностям проведена общая касательная AB, не проходящая через точку T. Третья окружность касается прямой AB и внешним образом обеих данных окружностей. Известны длины радиусов двух из трёх рассмотренных окружностей — это числа 64 и 100. Найдите длину радиуса оставшейся окружности.

1491. Две окружности касаются внутренним образом. Прямая, проходящая через центр меньшей окружности, пересекает бóльшую окружность в точках A и B, меньшую — в точках K и M. Найдите радиус бóльшей окружности, если $AK = 3$, $KM = 2$, $MB = 4$.

1492. Даны две окружности, пересекающиеся в точках M и D. MB и CD — касательные к первой и второй окружностям, B и C — точки на окружностях. $CD = 10$, MB в 2 раза больше CD. Найдите MC, если периметр $MBDC$ равен 45.

1493. В правильном треугольнике ABC со стороной $2\sqrt{3} + 2$ окружность с центром в точке C касается вписанной окружности в точке K и пересекает сторону AC в точке D. Найдите площадь треугольника, образованного точками K, D и точкой пересечения общей касательной к двум этим окружностям, проходящей через точку K, со стороной AC.

1494. Площадь ромба со стороной 4 равна $8\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, касающейся вписанной в ромб окружности и двух его сторон.

10.1.7. Вписанная и описанная окружность, четырёхугольник

1495. Окружность касается сторон MN и MK прямоугольника $MNPK$ и проходит через вершину P. Сторону KP она пересекает в точке A. Найдите площадь трапеции $MNAK$, если $MN = 9$ и $NK = \sqrt{145}$.

1496. Четырёхугольник $MNPK$ вписан в окружность, его диагонали пересекаются в точке A. Найдите AP, если $NP = 6$; $MA = 9$ и MP — биссектриса угла NMK и в четырёхугольник $MNPK$ можно вписать окружность.

1497. Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O так, что вокруг четырёхугольника A_1OB_1C можно описать окружность. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 4\sqrt{3}$, $BC = 5$.

1498. На стороне AB квадрата $ABCD$ построен треугольник ABK. Биссектрисы AA_1 и BB_1 этого треугольника пересекаются в точке O так, что вокруг четырёхугольника A_1OB_1K можно описать окружность. Найдите площадь квадрата $ABCD$, если $AK = 3$, $BK = 5$.

Олимпиадные задачи (С6)

§ 11. Алгебра и начала анализа

11.1. Уравнения. Системы уравнений

11.1.1. Тригонометрические уравнения

1499. Найдите все значения a, при которых уравнение $\cos x = (3a-7)^2$ имеет корни, а числа $\dfrac{27(2-a)}{4(a-1)^3}$ являются целыми.

1500. Найдите все значения p, при которых уравнение $\sin x = (3p-2)^2$ имеет корни, а числа $\dfrac{1-3p}{4p^3}$ являются целыми.

11.1.2. Комбинированные уравнения

1501. Имеет ли система $\begin{cases} 2\sin x + ab = bx, \\ \sin 2x = b\sin x \end{cases}$ решение, если известно, что a и b таковы, что первое уравнение имеет ровно 2 решения?

1502. Имеет ли система $\begin{cases} 3\cos x - \left(\dfrac{\sin a}{2} + 1{,}5\right)x = -12, \\ \dfrac{1}{\sin x + 0{,}5 + \dfrac{\sin a}{6}} = -|b|\sin x \end{cases}$ решение, если известно, что первое уравнение имеет ровно 2 решения?

1503. Решите уравнение $\underbrace{f\Big(f\big(\ldots f(x)\big)\ldots\Big)}_{2012\ \text{раз}} = 3$, где $f(x) = \dfrac{3^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{3-x^3}}$.

§ 12. Арифметика и алгебра

12.1. Текстовые задачи

12.1.1. Разные задачи

1504. Определите, сколько раз в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$, заданной формулой $a_n = \left[\sqrt{5n} + \frac{1}{2}\right]$, встречается число 20. ($[A]$ — целая часть числа A.)

1505. Определите, сколько раз в последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n$, заданной формулой $a_n = [\sqrt{4n+2}]$, встречается число 15. ($[A]$ — целая часть числа A.)

1506. Вдоль окружности по порядку расставили натуральные числа от 1 до 211. Затем, двигаясь вдоль окружности, стали вычёркивать каждое второе число, то есть последовательно числа $2, 4, 6, \dots, 210, 1, 5, \dots$, до тех пор, пока не осталось одно число. Определите, какое число осталось.

1507. Вдоль окружности по порядку расставили натуральные числа от 1 до 100. Затем, двигаясь вдоль окружности, стали вычёркивать каждое второе число, то есть последовательно числа $2, 4, 6, \dots, 100, 3, 7, \dots$, до тех пор, пока не осталось одно число. Определите, какое число осталось.

1508. Найдите все такие последовательности пяти идущих подряд натуральных чисел, что сумма квадратов двух последних чисел последовательности равна сумме квадратов трёх первых чисел. В ответе запишите сумму всех чисел в найденных последовательностях.

1509. Найдите все последовательности шести идущих через одно натуральных чисел, таких, что сумма квадратов двух последних чисел последовательности равна сумме квадратов четырёх первых чисел. В ответе запишите сумму всех чисел в найденных последовательностях.

1510. Последовательность a_n задана следующим образом: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 9a_n + n$ при $n \geqslant 1$. Найдите все члены последовательности, которые являются точными квадратами.

1511. Последовательность a_n задана следующим образом: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 4a_n + n$ при $n \geqslant 1$. Найдите все члены последовательности, которые являются точными квадратами.

12.1.2. Десятичная запись числа

1512. Если к десятичной записи натурального числа a приписать справа запятую, а потом некоторый бесконечный набор цифр, то получится десятичная запись такого иррационального числа c, что
$(2c-3)^2 = 3a^2 - 12c + 46$. Найдите все возможные значения числа c.

1513. Если к десятичной записи натурального числа a приписать справа запятую, а потом некоторый бесконечный набор цифр, то получится десятичная запись такого иррационального числа c, что $2c^2 + c = 20a + 10$. Найдите все возможные значения числа c.

1514. Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел a и b, $a < b$, что если к десятичной записи числа $b-a$ приписать справа через запятую десятичную запись числа b, то получится десятичная запись числа, равного $\frac{a+b}{a}$.

1515. Найдите сумму всех трёхзначных натуральных чисел n, таких, что первая и последняя цифры числа n^2 равны 1.

1516. Пусть x — 5-значное натуральное число, состоящее из цифр от 1 до 9, взаимно простое с числом $B = 10^5 - 1$. Найдите количество различных чисел (включая число x), взаимно простых с числом B, получаемых из x циклической перестановкой цифр.

1517. Трёхзначные числа m и n являются полными квадратами. Причём m получено из n уменьшением на число вида $111a$, где a — натуральное число. Найдите все такие числа a.

1518. Найдите все такие пары однозначного числа a и двузначного числа b, что если к десятичной записи числа a приписать справа через запятую десятичную запись числа b и учетверить это число, то получится квадратный корень из трёхзначного числа, записанного, не меняя порядка, цифрами чисел a и b.

1519. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр натурального числа n. Найдите все такие натуральные n, при которых $n + S(n) = 2012$.

1520. Если к двузначному числу a приписать справа двузначное число b, то полученное число будет в 3 раза больше произведения чисел a и b. Найдите эти числа.

1521. Можно ли составить из цифр 2, 3, 4, 9 (каждую цифру можно использовать неограниченное количество раз) два числа, одно из которых в 1234567789 раз больше другого?

1522. Найдите натуральное двузначное число, сумма цифр которого равна 14 и при увеличении которого на 46 получается число, произведение цифр которого равно 6.

1523. Найдите трёхзначное натуральное число, если сумма его цифр равна 12 и оно равно $\frac{107}{41}$ числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке.

1524. Какую наименьшую сумму цифр может иметь число вида $6n^2 - n + 1$ при натуральном числе n?

1525. Какую наименьшую сумму цифр может иметь число вида $8n^2 - 3n + 1$ при натуральном числе n?

1526. Найдите все трёхзначные натуральные числа, квадрат которых оканчивается этим же числом.

1527. Найдите количество двузначных натуральных чисел, куб которых заканчивается этим же числом.

1528. Существует ли такое натуральное число n, при котором число 2^n будет начинаться на 3842561?

1529. Существует ли такое натуральное число n, при котором число 7^n будет начинаться на 100032452?

1530. Найдите все натуральные значения n, при которых число $1\underbrace{44\ldots4}_{n\text{ цифр}}$ является квадратом натурального числа.

1531. Найдите трёхзначное число, зная, что число его единиц есть среднее геометрическое числа сотен и десятков. Если в его записи поменять местами цифры сотен и десятков и вычесть полученное число из искомого, то разность будет равна 270.

1532. Найдите все натуральные трёхзначные числа, каждое из которых обладает следующими двумя свойствами:

1) первая цифра числа в 4 раза меньше суммы двух других его цифр;

2) разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой двух последних его цифр, неотрицательна и делится на 72 без остатка.

1533. Найдите наибольшее натуральное число, не оканчивающееся нулём, которое при вычёркивании одной (не первой) цифры уменьшается в целое число раз.

1534. Факториалом натурального числа n (пишут $n!$) называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно. Также по определению считается, что $0! = 1$. Найдите все трёхзначные числа, равные сумме факториалов своих цифр.

1535. Четырёхзначное число A оканчивается цифрой 1. Двузначное число, образованное цифрами тысяч и сотен, цифра десятков и цифра единиц числа A — три последовательных члена арифметической прогрессии. Среди всех таких чисел A найдите то, у которого разность цифры десятков и цифры сотен наименьшая.

12.1.3. Делимость

1536. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник $m \times n$ клеток, причём m и n взаимно просты и $m > n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 клеток прямоугольника. Найдите все возможные значения m и n.

1537. Каждое из чисел $7, 8, \ldots, 15$ умножают на каждое из чисел $3, 4, \ldots, 8$ и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

1538. Каждое из чисел $5, 6, \ldots, 13$ умножили на каждое из чисел $11, 12, \ldots, 20$ и перед каждым из полученных произведений произвольным образом поставили знак плюс или минус, после чего все 90 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

1539. Перед каждым из чисел $10, 11, \ldots, 18$ и $2, 3, \ldots, 12$ произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 99 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

1540. Перед каждым из чисел $2, 3, \ldots, 8$ и $20, 21, \ldots, 28$ произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 63 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

1541. Каждое из чисел $3, 4, \ldots, 11$ умножают на каждое из чисел 13, 14, 15, 16, 17 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все результаты складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

1542. Каждое из чисел $2, 3, \ldots, 6, 7$ делят на каждое из чисел $\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{17}$ и перед каждым из полученных частных произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все результаты складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

1543. Перед каждым из чисел $3, 4, \ldots, 11$ и 13, 14, 15, 16, 17 ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго, а затем все результаты складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

1544. Перед каждым из чисел $2, 3, \ldots, 7$ и $8, 9, \ldots, 17$ ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора вычитают каждое из образовавшихся чисел второго, а затем все результаты складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

1545. Найдите наименьшее натуральное число, четверть которого есть пятая степень, а пятая часть которого есть четвёртая степень.

1546. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого равна пятой степени натурального числа, а пятая часть равна квадрату другого натурального числа.

1547. Найдите все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 33.

1548. Найдите все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 77.

1549. Найдите все натуральные значения n, при которых число $\dfrac{n^2+13}{n+1}$ является натуральным.

1550. Найдите все целые значения m, при которых число $\dfrac{m^2-4}{m+3}$ является целым.

1551. Найдите все пары целых чисел x и y, при которых является верным равенство $-3xy-10x+13y+35=0$.

1552. Найдите все пары целых чисел, при которых является верным равенство $3xy+16x+13y+61=0$.

1553. К трёхзначному натуральному числу a приписали его же ещё раз, а затем сложили с единицей. В результате этих действий получили число, являющееся точным квадратом. Найдите все такие a.

1554. К трёхзначному натуральному числу b приписали его же ещё раз, а затем сложили с числом 4. В результате этих действий получили число, являющееся точным квадратом. Найдите все такие b.

1555. Сумма модулей членов конечной арифметической прогрессии равна 175. Если все её члены уменьшить на 1 или уменьшить на 2, то в обоих случаях сумма модулей членов полученной прогрессии будет также равна 175. Какие значения при этих условиях может принимать величина $\dfrac{n^2d}{100}$, где d — разность прогрессии, а n — число её членов?

1556. Сумма модулей членов конечной арифметической прогрессии равна 325. Если все её члены уменьшить на 1 или уменьшить на 2, то в обоих случаях сумма модулей членов полученной прогрессии будет также равна 325. Какие значения может принимать при этих условиях величина $\dfrac{n^2d}{100}$, где d — разность прогрессии, а n — число её членов?

1557. Решите в целых числах уравнение $4 \cdot 3^x - 35 = y^2$.

1558. Решите в целых числах уравнение $2^x - 63 = y^2$.

1559. Найдите все пары натуральных чисел k и n, таких, что $k < n$ и $\left(\frac{1}{n^5}\right)^k = \left(\frac{1}{k^5}\right)^n$.

1560. Найдите все пары натуральных чисел k и n, таких, что $k < n$ и $\left(\sqrt{n^5}\right)^k = \left(\sqrt{k^5}\right)^n$.

1561. Найдите все четырёхзначные квадратные числа, такие, что два числа, записанные первыми двумя цифрами и последними двумя цифрами, тоже являются квадратными. Число называется квадратным, если оно является квадратом некоторого натурального числа.

1562. Найдите наименьшее шестизначное квадратное число, такое, что два числа, записанные первыми тремя цифрами и последними тремя цифрами, тоже являются квадратными. Число называется квадратным, если оно является квадратом некоторого натурального числа.

1563. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 1, \\ ax + y = b \end{cases}$ разрешима при любых значениях b?

1564. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x^2 = y^2 + 2, \\ y + a = ax + b \end{cases}$ имеет решения при любых значениях b?

1565. Решите в натуральных числах систему уравнений

$$\begin{cases} a^3 + b = c(a^2 + b^2), \\ a + b^3 = d(a^2 + b^2). \end{cases}$$

1566. Все члены последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 7 раз больше, либо в 7 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 1935.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

1567. Найдите все такие простые числа p, при которых число $p^2 + 29$ имеет ровно четыре различных делителя.

1568. Произведение всех делителей натурального числа P оканчивается ровно на 96 нулей. На сколько нулей может оканчиваться число P?

1569. Может ли сумма первых n чисел натурального ряда оканчиваться на 123456789?

1570. Натуральное число a, меньшее 5000, при делении на 5 и на 9 даёт одинаковый остаток α, при делении на 7 и на 4 даёт остаток β, а при делении на 10 даёт остаток 2. Найдите все возможные значения числа a.

1571. Найдите все натуральные значения a, b, m, n, при которых имеет место равенство $b^m - a^m = (b^n - a^n)b$ при $a \neq b$, $b \neq 1$.

1572. Решите в целых числах уравнение $6x^2 + 5y^2 = 74$.

1573. Решите в целых числах уравнение $19x^2 + 28y^2 = 729$.

1574. Про натуральное число n известно, что для любого натурального числа m выполняется хотя бы одно из двух условий:

а) m^5 не делится нацело на n^2; б) m^{30} делится нацело на n^{17}.

Найдите количество всех таких натуральных n, меньших 60.

1575. Про натуральное число n известно, что для любого натурального числа m выполняется хотя бы одно из двух условий:

а) m^5 не делится нацело на n; б) m^{40} делится нацело на n^{13}.

Найдите количество таких натуральных n, меньших 200.

1576. Натуральные числа m и n таковы, что сумма обратных им величин обратна некоторому простому числу. Решите в натуральных числах уравнение $m^2 + 2n^2 = k^2$.

1577. Натуральные числа m и n таковы, что сумма обратных им величин обратна некоторому простому числу. Решите в натуральных числах уравнение $4m^2 + 3n^2 = k^2$.

1578. Найдите все натуральные числа n, для которых $2^8+2^{11}+2^n$ является квадратом натурального числа.

1579. Найдите

а) такое наименьшее натуральное число m, что число $4^m - 2^{100}$ является натуральным числом, делящимся нацело на 3;

б) такое наименьшее натуральное число m, что число $4^m - 4^{62}$ является натуральным числом, делящимся нацело на 27;

в) такое натуральное число m, не превосходящее 10 000, что $4^m - 4^{53}$ является натуральным числом, делящимся нацело на 3^9.

1580. Найдите

а) такое наименьшее натуральное число m, что число $4^m - 8^{40}$ является натуральным числом, делящимся нацело на 3;

б) такое наименьшее натуральное число m, что число $4^m - 4^{39}$ является натуральным числом, делящимся нацело на 27;

в) такое натуральное число m, не превосходящее 20 000, что $4^m - 4^{44}$ является натуральным числом, делящимся нацело на 3^{10}.

1581. Решите уравнение $xy = x^3 - y$ в целых числах.

1582. Решите уравнение $xy + 2 = 3x + 2y$ в целых числах.

1583. На доске выписаны 79 последовательных натуральных чисел.
а) Всегда ли среди них есть число, сумма цифр которого делится на 13?
б) Приведите пример числа, выписанного на доске первым, если 78 последовательных чисел из этих 79 такие, что сумма цифр каждого из этих чисел не делится на 13.

1584. Для каждого натурального числа n будем обозначать количество его натуральных делителей через $d(n)$ (включая единицу и само число n). Например, $d(1) = 1$, $d(3) = 2$, $d(6) = 4$. Найдите все такие натуральные числа m, что
а) число $m^2 - 196$ является натуральным и $d(m^2 - 196) = 2$;
б) $d(m^2 + 24) = 3$;
в) число m является простым и $d(m^2 + 23) = 6$.
Ответ приведите отдельно для каждого из трёх пунктов.

1585. Для каждого натурального числа n будем обозначать количество его натуральных делителей через $d(n)$ (включая единицу и само число n). Например, $d(1) = 1$, $d(3) = 2$, $d(6) = 4$. Найдите все такие натуральные числа m, что
а) число $m^2 - 324$ является натуральным и $d(m^2 - 324) = 2$;
б) $d(m^2 + 40) = 3$;
в) число m является простым и $d(m^2 + 35) = 6$.
Ответ приведите отдельно для каждого из трёх пунктов.

1586. Найдите количество простых чисел среди чисел вида
$\dfrac{3^{2^n} + 5^{2^n} + 6^{2^n}}{2}$ (n — натуральное).

1587. Натуральное число n делится без остатка на 8, на 9, на 11 и имеет 30 делителей, среди которых 1 и само это число n. Найдите все такие натуральные числа.

1588. Натуральное число n делится без остатка на 4, на 9, на 49 и имеет 45 делителей, среди которых 1 и само это число n. Найдите все такие натуральные числа.

1589. На доске записано n различных чисел, каждое из которых является натуральной степенью числа 2. Среднее геометрическое этих чисел равно 8, а среднее арифметическое может быть записано натуральным числом. Найдите все возможные значения n.

1590. На доске записано n различных чисел, каждое из которых является натуральной степенью числа 2. Среднее арифметическое этих чисел равно 112. Найдите все возможные значения n.

Ответы к тестам

Ответы к заданиям части В

№	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12	B13	B14	B15
1	4	62	31,5	195	8	0,2	–2	6	2	174	–9	0,6	4	70	–4
2	2	120	1	9930	9	0,65	6	132	–1,2	134	299	7	161	6	–1
3	15	42	5	49	16	0,5	–9	151	–1	56	7	40	15	11	7
4	12	175	3	12,02	20	0,2	0,5	36	–2	50,41	12	2,5	54	7,5	–11
5	17	2	11	62,11	42	0,38	–3	7	0,05	9	–14	5	89	30	50
6	17	20	4	0,86	18	0,5	2	240	5	30	10	5	0,8	15	–1
7	13	22	75	75	20	0,16	0	4,5	28	64	0,25	80	6	5,9	–6
8	7	157	15	418 500	13	0,9025	3	12	6	17,5	49	28	14	25	2
9	5	244	2000	325	–5	0,995	8,5	128	4	36	25	3,4	24	12	110
10	10	304	19	410	22	0,88	2,8	–0,3	2	120	0,5	60	7	6	0
11	348,8	20	–2	5400	3,5	0,4	–5	40	7	10	64	0,075	0,5	6,4	–21
12	10	3000	4	501 000	8	5	27	1	5	12,5	128	14	24	4	1
13	6084	5	4	2,8	12	0,5	1	11	2	2,5	147	3,2	13	3	1,5
14	24 480	25	13	710	16	0,0625	–72	–0,7	2	2,5	6	5,75	25	350	–4
15	29	17 748	500	38	20	0,2	1	120	0	22,5	–1,25	30	45	200	0
16	122	21000	6	795	26	0,002	–11	0,4	2	405	–15	4	30	10	0,25
17	10	21	4	41 629	39,5	0,33	1,5	44	11	96	81	5,6	45	1 562 500	–3
18	52,5	30 000	3	8750	18,5	0,125	1	15	5	4,5	0,25	1,5	3	45	3
19	7	16	8	2124	28	0,008	–2	136	12,5	54	5	15	2,4	88	–3
20	268	10 400	124	1190	22	0,52	–11	72	22	350	625	60	90	41	25

Ответы к заданиям части C (начало)

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
1	а) $\pi k,\ k\in Z$; $-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$; б) $\frac{14\pi}{3}, 5\pi, \frac{17\pi}{3}, 6\pi$	$\frac{4\sqrt{259}}{5}$	$\left(\frac{-3-\sqrt{53}}{2}; -5\right] \cup \{0\} \cup \{2\}$	$\frac{25}{119}$	$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{7}; +\infty\right)$	а) нет; б) да; в) 106
2	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, \pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $n, k\in Z$; б) $-\frac{9\pi}{2}$, $-\frac{17\pi}{4}, -\frac{15\pi}{4}, -\frac{7\pi}{2}$	$\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{15}}{15}$	$\{0\} \cup [\log_3 8; 3) \cup (3; 11]$	$7\sqrt{53}$	$[-29-4\sqrt{51}; -29+4\sqrt{51}]$	а) 84 и 57 912; б) 24; в) 97 596
3	а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; б) $\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}$	4	$(2; 5]$	17	$(-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$	а) нет; б) да; в) $\frac{7}{9}$
4	а) $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$; б) $-\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{55}}{12}$	$[-2{,}5; -2) \cup [3; 3{,}5]$	$\frac{25\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$	а) нет; б) да; в) $\frac{3}{4}$
5	а) $\pi+2\pi n,\ n\in Z$; $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi k,\ k\in Z$; б) $5\pi, 7\pi, \frac{22\pi}{3}, \frac{26\pi}{3}$	$9\sqrt{7}$	$\{-4; 0\} \cup [2; 3)$	8	$[-3{,}25; 0{,}75]$	а) 101; б) 906; в) 545

Ответы к заданиям части С (продолжение)

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
6	а) $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ n\in Z$; $2\pi+4\pi k,\ k\in Z$; б) $6\pi,\ \frac{22\pi}{3},\ \frac{26\pi}{3}$	$\frac{3}{4}\sqrt{661}$	$[-5;-3]\cup\{0\}$	$18+2\sqrt{17}$	$\left[1{,}5;1\frac{2}{3}\right)$	а) нет; б) 64; в) 64
7	а) $\pi+2\pi k,\ k\in Z$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$; б) $-\frac{\pi}{2},\ \pi$	40	$(-1;1]\cup(2;3)\cup(3;8]$	$\frac{5\sqrt{119}}{3}$	$\pm\sqrt{2}$	а) 19; б) 21; в) 18
8	а) $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi k,\ k\in Z$; б) $-\pi+\arcsin\frac{1}{3},\ -\arcsin\frac{1}{3}$	$11\frac{1}{3}$	$(-1;1)$	$25\sqrt{3}$	$\frac{5\pm2\sqrt{2}}{2}$	а) 17; б) 23; в) 8
9	а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; б) $\frac{7\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6}$	$32\sqrt{2}$	$(0;\log_5 2]\cup[5;6)\cup(6;7]$	б) 2	$a<-8;\ a>5$	а) 100; б) 72; в) 48
10	а) $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$; б) $-\frac{5\pi}{3},\ -\frac{4\pi}{3}$	$42\frac{2}{3}$	$(0;\log_3 2]\cup[6;7)\cup(7;8]$	б)1	$a<-15;\ a>10$	а) 2; б) нет; в) 40

Ответы к заданиям части С (продолжение)

№	С1	С2	С3	С4	С5	С6
11	а) $\pi k, k \in Z$; $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$; б) $\frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, 2\pi$	9261π	$(4 + \log_2(\log_2 3); 5) \cup$ $\cup [6; +\infty)$	13,8	$a < 0$; $a = \frac{1}{4}$	а) да; б) нет; в) 1, 2, 3, … 15, 16, 18, 20, 30
12	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$; б) $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$	$\frac{256\pi}{3}$	$(-\infty; 1) \cup$ $\cup (2; 1 + \log_2(\log_2 5)]$	24	$a = -\frac{1}{4}$; $a > 0$	а) да; б) нет; в) 1, 2, 3, … 14, 15, 16, 21, 28
13	а) $\frac{\pi n}{2}, n \in Z$; б) $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$	$11\frac{1}{3}$	$[\log_2 7; 3{,}5]$	6	$\left(-\infty; \frac{3-\sqrt{57}}{2}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{3+\sqrt{57}}{2}; +\infty\right)$	а) 0; б) 502; в) 13
14	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; $(-1)^{n+1} + \pi n, n \in Z$; б) $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}$	$9\sqrt{2} - 9$	$(-2; 0) \cup (0; \log_5 2]$	$8\sqrt{3}$	$(-\infty; 3 - \sqrt{3}) \cup$ $\cup (3 + \sqrt{3}; +\infty)$	а) 503; б) 598; в) 1; 2
15	а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$; б) $-\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$	5	$[-1 + \sqrt{6}; 2) \cup$ $\cup \left(2; \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3}\right)$	12,5	$-12{,}5$	а) нет; б) да; в) нет

Ответы к заданиям части С (окончание)

№	С1	С2	С3	С4	С5	С6
16	а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$; б) $-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$	$\sqrt{91}$	$(\sqrt[3]{3}; 70]$	36	$-40{,}5$	а) нет; б) да; в) нет
17	а) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+2\pi k, k\in Z$; $\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+2\pi n$, $n\in Z$; б) $3\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$	$36\sqrt{2}$	$(0; \sqrt{2}-1]\cup$ $\cup(1; \log_2 3)\cup$ $\cup(\log_3 8; 2]$	а) 9; б) $149\frac{1}{7}$	1; 2	а) 2673; б) 459; в) 3168
18	а) $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}+2\pi n, n\in Z$; б) $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}-2\pi$	$90\sqrt{2}$	$(0; \sqrt{10}-3]\cup$ $\cup(1; \sqrt{2}]\cup$ $\cup[2; 3]$	а) 144; б) $420\frac{1}{3}$	$(1; 2)$	а) 2187; б) 243; в) 2439
19	а) $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$; б) $\frac{13\pi}{4}; \frac{17\pi}{4}$	$100\sqrt{13}(\sqrt{2}-1)$	0; 2	3	$-\frac{21}{4}, 2-\sqrt{7}, 2+\sqrt{7}, \frac{37}{4}$	-6; 10
20	а) $\frac{3\pi}{4}+\pi n, n\in Z$. б) $\frac{31\pi}{4}; \frac{35\pi}{4}$	$9\sqrt{39}$	0	6	$-\frac{13}{4}; -3; -1; -\frac{3}{4}$	-9; 15

Ответы к сборнику задач

1. 216. **2.** 7,2. **3.** 7. **4.** 3. **5.** 1. **6.** 2,5. **7.** 5,5. **8.** –36. **9.** 90. **10.** 8. **11.** 1,8.
12. 125. **13.** 4,5. **14.** –2. **15.** 10. **16.** 0,5. **17.** –7. **18.** –2. **19.** 25. **20.** 8. **21.** 5.
22. 7. **23.** 1. **24.** 4. **25.** –16. **26.** 48. **27.** 6. **28.** 0,25. **29.** 1. **30.** 2. **31.** 4. **32.** 9,5.
33. 8,5. **34.** 16. **35.** 112. **36.** 300. **37.** 100. **38.** 56. **39.** 125. **40.** 36. **41.** 0,2.
42. 3. **43.** 3. **44.** 0,25. **45.** 17. **46.** 13,5. **47.** 0,25. **48.** 180. **49.** 64. **50.** 196.
51. 4. **52.** 486. **53.** 44. **54.** 2. **55.** 3,5. **56.** 6. **57.** 3. **58.** 1. **59.** 2. **60.** –1. **61.** 0.
62. 0,5. **63.** –1,5. **64.** 0,25. **65.** 0,25. **66.** 0,125. **67.** 1. **68.** 4. **69.** 4. **70.** 0,5.
71. 3,5. **72.** 1,71. **73.** 0,75. **74.** –2,4. **75.** –0,25. **76.** 0,75. **77.** 1. **78.** 0,75.
79. 1,25. **80.** 2. **81.** 1. **82.** –6. **83.** 5. **84.** 5,5. **85.** –0,2. **86.** 12. **87.** 3. **88.** 9.
89. 4. **90.** 19. **91.** –3. **92.** 3,95. **93.** –0,3. **94.** 2. **95.** –0,5. **96.** 2. **97.** 2. **98.** 3.
99. 1,5. **100.** 0,0625. **101.** 22. **102.** –90. **103.** –4. **104.** 1. **105.** 7. **106.** 1.
107. –77. **108.** 21. **109.** 8. **110.** 0,5. **111.** –2. **112.** 0,5. **113.** –5. **114.** 3.
115. 1. **116.** 5. **117.** 1. **118.** –3. **119.** 6. **120.** 3. **121.** 4. **122.** 17. **123.** 4.
124. –3,5. **125.** 3. **126.** 1. **127.** 3,5. **128.** –4,8. **129.** 19. **130.** 4. **131.** 7,5.
132. 0,75. **133.** 0,25. **134.** –0,2. **135.** –15. **136.** –40. **137.** –2. **138.** –4.
139. 4,5. **140.** 2. **141.** 0. **142.** –1,5. **143.** 1,5. **144.** 17. **145.** –3,5. **146.** 3.
147. –8. **148.** 7. **149.** 5. **150.** 19,6. **151.** 37,5. **152.** 5. **153.** –3. **154.** 3. **155.** 0.
156. 16. **157.** 43. **158.** –9,5. **159.** –5. **160.** 30. **161.** –148. **162.** 22. **163.** 1,2.
164. 4. **165.** 0. **166.** –4. **167.** –2. **168.** 0. **169.** 0. **170.** 1. **171.** 3. **172.** 4.
173. 45,5. **174.** 12. **175.** 9. **176.** 80. **177.** 18. **178.** 25. **179.** 2. **180.** 30.
181. 18. **182.** 27. **183.** 13. **184.** 1260. **185.** 600. **186.** 5. **187.** 756. **188.** 5.
189. 71. **190.** 4. **191.** 10. **192.** 7,5. **193.** 99. **194.** 3. **195.** 32. **196.** 5.
197. 2005. **198.** 15. **199.** 30. **200.** 6. **201.** 4. **202.** 8. **203.** 990,5. **204.** 6.
205. 40. **206.** 27. **207.** –24,8. **208.** 240. **209.** 3. **210.** 2. **211.** 2. **212.** 45.
213. 1. **214.** 3. **215.** 13. **216.** 15. **217.** 1. **218.** 135. **219.** –1. **220.** 1. **221.** 17.
222. –2. **223.** 45. **224.** 3,5. **225.** 12,4. **226.** –0,5. **227.** 1,5. **228.** 5. **229.** 1,4.
230. 3,5. **231.** 0,4. **232.** 0,2. **233.** 1. **234.** –0,5. **235.** 5. **236.** 2. **237.** –1.
238. 2. **239.** 9. **240.** 5. **241.** –3. **242.** 2. **243.** 6. **244.** 3. **245.** 4. **246.** 6.
247. –4. **248.** 2. **249.** –9. **250.** 5. **251.** 11. **252.** 2. **253.** 1. **254.** –0,9. **255.** 5.
256. 5. **257.** 1,75. **258.** 8. **259.** 4. **260.** 2. **261.** 21. **262.** 5. **263.** 17. **264.** –0,5.
265. –4. **266.** 6. **267.** 2. **268.** 3. **269.** –1. **270.** 5. **271.** 4. **272.** 2. **273.** –2.
274. 6. **275.** –1. **276.** 6. **277.** 1. **278.** –2. **279.** 3. **280.** –0,5. **281.** 6. **282.** 0,5.
283. 5. **284.** 12. **285.** 43. **286.** 25. **287.** 15. **288.** 4,5. **289.** 5. **290.** 6. **291.** 432.
292. 9. **293.** 121,5. **294.** 38. **295.** 11. **296.** 9. **297.** 6. **298.** 7. **299.** 0,75.
300. –1,5. **301.** 1,5. **302.** 4. **303.** –10,8. **304.** –5. **305.** 0. **306.** 4. **307.** –27.
308. 7. **309.** –10. **310.** 0. **311.** 16,5. **312.** 12. **313.** 3. **314.** 2. **315.** 6. **316.** –1.
317. 9. **318.** 0. **319.** –1. **320.** –2. **321.** 11. **322.** 3. **323.** 7. **324.** 9. **325.** 6.

326. 3. **327.** –2. **328.** 5. **329.** 3. **330.** 5. **331.** –5. **332.** 3. **333.** –31. **334.** –18. **335.** –13. **336.** –3. **337.** 8. **338.** –1,25. **339.** 41. **340.** –48. **341.** 14. **342.** 0. **343.** 10. **344.** 26. **345.** 8. **346.** –4. **347.** –13. **348.** 50. **349.** 2. **350.** 1. **351.** 12. **352.** 25. **353.** –4,6. **354.** 4. **355.** 0. **356.** 14. **357.** 1. **358.** –24. **359.** 5. **360.** 9. **361.** 125. **362.** 10. **363.** 4. **364.** –19. **365.** 0,75. **366.** 3,5. **367.** 6. **368.** 10. **369.** 21,375. **370.** 1,5. **371.** 2,25. **372.** 1,5. **373.** 4,5. **374.** 32. **375.** 0,5. **376.** 40,5. **377.** 18. **378.** 0,8. **379.** 9,25. **380.** 0,75. **381.** 10,5. **382.** 2. **383.** 1,75. **384.** 4. **385.** 450. **386.** 3. **387.** 80. **388.** 10. **389.** 120. **390.** 5764. **391.** 3. **392.** 100. **393.** 17. **394.** 10. **395.** 12. **396.** 0,1. **397.** 8. **398.** 35. **399.** 41. **400.** 240. **401.** 137500. **402.** 15. **403.** 38,8. **404.** 71,6. **405.** 15. **406.** 31. **407.** 20. **408.** 170. **409.** 304. **410.** 1,5. **411.** 3. **412.** 33. **413.** 2. **414.** 24. **415.** 7,5. **416.** 7. **417.** 100. **418.** 250. **419.** 53. **420.** 75. **421.** 4. **422.** 9,5. **423.** 20. **424.** 20. **425.** 8. **426.** 1. **427.** 1,5. **428.** 20. **429.** 21,8. **430.** 75. **431.** 5. **432.** 2,5. **433.** 8. **434.** 40. **435.** 20. **436.** 190. **437.** 15. **438.** 3120. **439.** 14. **440.** 23. **441.** 10. **442.** 22. **443.** 5. **444.** 40. **445.** 50. **446.** 30. **447.** 8. **448.** 33. **449.** 12. **450.** 5. **451.** 10. **452.** 6. **453.** 9. **454.** 12. **455.** 12. **456.** 84. **457.** 9 500. **458.** 15 500. **459.** 12. **460.** 4. **461.** 28. **462.** 30450. **463.** 4. **464.** 48. **465.** 8. **466.** 14. **467.** 25,44. **468.** 7. **469.** 61. **470.** 160. **471.** 9. **472.** 6. **473.** 90 000. **474.** 12,5. **475.** 32. **476.** 5. **477.** 240. **478.** 344 400. **479.** 9. **480.** 48. **481.** 6. **482.** 30. **483.** 1,5. **484.** 25. **485.** 140. **486.** 12,5. **487.** 9. **488.** 5. **489.** 2. **490.** 24. **491.** 3,75. **492.** 80. **493.** 43,8. **494.** 40. **495.** 4. **496.** 2. **497.** 20. **498.** 75. **499.** 20. **500.** 60. **501.** 80. **502.** 60. **503.** 9. **504.** 12. **505.** 7. **506.** 14. **507.** 3. **508.** 15. **509.** 3. **510.** 22. **511.** 15. **512.** 40. **513.** 20. **514.** 60. **515.** 72. **516.** 16. **517.** 4,8. **518.** 16. **519.** 35. **520.** 17. **521.** 30. **522.** 70. **523.** 40. **524.** 16. **525.** 2. **526.** 68. **527.** 450. **528.** 25. **529.** 485. **530.** 450. **531.** 10. **532.** 465. **533.** 20. **534.** 75. **535.** 72. **536.** 5. **537.** 7. **538.** 2,2. **539.** 7. **540.** 8. **541.** 15. **542.** 9. **543.** 9. **544.** 30. **545.** 60. **546.** 75. **547.** 7. **548.** 24. **549.** 3. **550.** 6. **551.** 1. **552.** 360. **553.** 30. **554.** 6. **555.** 11,25. **556.** 35. **557.** 12. **558.** 4. **559.** 11. **560.** 18. **561.** 13. **562.** 22. **563.** 27. **564.** 21. **565.** 14. **566.** 48. **567.** 15. **568.** 25. **569.** 6,4. **570.** 6. **571.** 4. **572.** 20. **573.** 117,5. **574.** 1. **575.** 1. **576.** 1. **577.** 2. **578.** 4. **579.** 38. **580.** 2, 5. **581.** 45. **582.** 360. **583.** 3. **584.** 58,5. **585.** 2. **586.** 4000. **587.** 3. **588.** 144000. **589.** 2. **590.** 8. **591.** 1,2. **592.** 1,1. **593.** 2. **594.** 13. **595.** 900. **596.** 60. **597.** 7250. **598.** 112 500. **599.** 300. **600.** 18. **601.** 732. **602.** 4. **603.** 5,04. **604.** 9. **605.** 3346. **606.** 23 320. **607.** 5950. **608.** 40,5. **609.** 184 300. **610.** 121. **611.** 253. **612.** 13950. **613.** 19. **614.** 7. **615.** 256. **616.** 6. **617.** 750. **618.** 3067,2. **619.** 370. **620.** 8 900. **621.** 12 540. **622.** 9 750. **623.** 2,25. **624.** 18. **625.** 8868. **626.** 5. **627.** 1034. **628.** 10. **629.** 1,5. **630.** 8436. **631.** 57,5. **632.** 1931,8. **633.** 1229. **634.** 868. **635.** 636. **636.** 25. **637.** 12 750. **638.** 700. **639.** 215. **640.** 11. **641.** 4788.

642. 201. **643.** 520 800. **644.** 9. **645.** 9280. **646.** 3,25. **647.** 458. **648.** 489,6. **649.** 372. **650.** 638,4. **651.** 4054,5. **652.** 10. **653.** 10 050. **654.** 535. **655.** 3. **656.** 15 080. **657.** 4. **658.** 14. **659.** 62,5. **660.** 21. **661.** 2. **662.** 2. **663.** 25. **664.** 70. **665.** 12. **666.** 5. **667.** 6. **668.** 14. **669.** 10. **670.** 12. **671.** 65. **672.** 106. **673.** 11. **674.** 1. **675.** 18. **676.** 4,4. **677.** 9. **678.** 3,125. **679.** 240. **680.** 15. **681.** 50. **682.** 12. **683.** 6,25. **684.** 7. **685.** 15. **686.** 30. **687.** 30. **688.** 15. **689.** 10,5. **690.** 4,5. **691.** 8. **692.** 16. **693.** 9. **694.** 0,6. **695.** 1,05. **696.** 3. **697.** 48. **698.** 10. **699.** 0,125. **700.** 1,5. **701.** 0,5. **702.** 3. **703.** 24. **704.** 12. **705.** –0,28. **706.** 0,6. **707.** –0,8. **708.** –2,4. **709.** 2,4. **710.** 0,75. **711.** 13. **712.** 0,25. **713.** 5. **714.** 14. **715.** 28. **716.** 1,4. **717.** 0,75. **718.** 3. **719.** 0,8. **720.** 0,8. **721.** 2. **722.** 30. **723.** 18. **724.** 0,2. **725.** 5,4. **726.** 50. **727.** 14. **728.** 145. **729.** 0,8. **730.** 39. **731.** 48. **732.** 72. **733.** 45. **734.** 0,75. **735.** 18. **736.** 14. **737.** 35. **738.** 20. **739.** 3. **740.** 0,5. **741.** 1. **742.** 5. **743.** 96. **744.** 96. **745.** –0,96. **746.** 4. **747.** 15. **748.** 72. **749.** 15. **750.** 21,25. **751.** 54. **752.** 15. **753.** 10,125. **754.** 21,12. **755.** 36. **756.** 32. **757.** 12. **758.** 9. **759.** 2,4. **760.** 17. **761.** 13. **762.** 8. **763.** 16. **764.** 1. **765.** 1,875. **766.** 6. **767.** 2. **768.** 4,8. **769.** 104. **770.** 16,94. **771.** 14. **772.** 14. **773.** 5. **774.** 10. **775.** 6, 5. **776.** 16. **777.** 18. **778.** 25. **779.** 17,5. **780.** 10. **781.** 18. **782.** 4. **783.** 14. **784.** 3. **785.** 42,5. **786.** 17. **787.** 24. **788.** 36. **789.** 32. **790.** 35. **791.** 36. **792.** 25. **793.** 20. **794.** 30. **795.** 33. **796.** 32. **797.** 32. **798.** 25. **799.** 8. **800.** 22. **801.** 34. **802.** 14. **803.** 20. **804.** –4. **805.** 1,25. **806.** 42. **807.** 31. **808.** 16. **809.** 3. **810.** 31. **811.** 22,5. **812.** 20. **813.** 18. **814.** 34. **815.** 40. **816.** –1,5. **817.** 12. **818.** 32,5. **819.** 24. **820.** 14,5. **821.** 4,5. **822.** 5. **823.** 112. **824.** 360. **825.** 48. **826.** 24. **827.** 12. **828.** 250. **829.** 5. **830.** 2,89. **831.** 13. **832.** 5. **833.** 0,5. **834.** 1040. **835.** 440. **836.** 36. **837.** 117. **838.** 120. **839.** 18,6. **840.** 128. **841.** 75. **842.** 30. **843.** 0,5. **844.** 68. **845.** –0,6. **846.** 264. **847.** 60. **848.** 103 823. **849.** 15. **850.** 54. **851.** 373. **852.** 0,5. **853.** 60. **854.** 8. **855.** 35. **856.** 27. **857.** 2. **858.** 9. **859.** 48. **860.** 10. **861.** 18. **862.** 12. **863.** 434. **864.** 108. **865.** 240. **866.** 4. **867.** 1411,2. **868.** 212,5. **869.** 10. **870.** 22, 5. **871.** 96. **872.** 100. **873.** 9. **874.** 8. **875.** 2. **876.** 700. **877.** 169. **878.** 125. **879.** 45. **880.** 0,75. **881.** 1. **882.** 3. **883.** 4. **884.** 0,75. **885.** 4. **886.** 13,5. **887.** 0,375. **888.** 0,16. **889.** 0,17. **890.** 0,9. **891.** 0,0625. **892.** 0,05. **893.** 0,55. **894.** 0,25. **895.** 0,91. **896.** 0,4. **897.** 0,4. **898.** 0,45. **899.** 0,25. **900.** 0,12. **901.** 0,16. **902.** 0,0001. **903.** 0,08. **904.** 0,92. **905.** 0,8. **906.** 0,2. **907.** 0,2. **908.** 0,48. **909.** 0,65. **910.** 0,8. **911.** 0,75. **912.** 0,2. **913.** 0,25. **914.** 0,375. **915.** 0,995. **916.** 0,98. **917.** 0,996. **918.** 0,5. **919.** 0,0625. **920.** 0,16. **921.** 0,175. **922.** 0,2. **923.** 0,25. **924.** 0,03. **925.** 0,08. **925.** 0,88. **927.** 0,75. **928.** 0,24. **929.** 0,25. **930.** 0,0625. **931.** 0,125. **932.** 0,75. **933.** 0,4. **934.** 0,88. **935.** 0,4. **936.** 0,15. **937.** 0,4. **938.** 0,38. **939.** 0,55. **940.** 0,64. **941.** 0,275.

942. 0,25. **943.** 0,35. **944.** 0,72. **945.** 0,375. **946.** 0,16. **947.** (2,5; 5).

948. $\left(4;3\right)$, $\left(\frac{1}{8};-2\right)$. **949.** $\left(2;\frac{1}{4}\right)$, $(2+\sqrt{7};2+\sqrt{7})$. **950.** $\left(27;4\right)$, $\left(\frac{1}{81};-3\right)$. **951.** (2; 1), (1; 2). **952.** (2; 2). **953.** 21. **954.** −0,5. **955.** −1.

956. $\frac{(-1)^{n+1}}{6}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{6}$, $n\in Z$. **957.** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$.

958. $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n, n\in Z$. **959.** Нет корней.

960. $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$. **961.** $\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$. **962.** $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$.

963. $\frac{5\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$. **964.** $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$. **965.** $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$.

966. $\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$. **967.** $\pm\arccos\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi n, n\in Z$.

968. $(-1)^n\arcsin\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\pi n, n\in Z$. **969.** *а)* $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\operatorname{arctg}3+\pi k$, $k\in Z$. *б)* $\frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arctg}3$. **970.** *а)* $\frac{\pi}{3}+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$, $k\in Z$. *б)* $\frac{4\pi}{3}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi$. **971.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$; б) $\frac{7\pi}{3}$. **972.** а) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi k$, $k\in Z$; б) $\frac{9\pi}{4}$. **973.** а) $2\operatorname{arctg}4+2\pi n$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; б) $\frac{7\pi}{2}$ **974.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $2\operatorname{arcctg}3+2\pi n$, $n\in Z$; б) $\frac{13\pi}{2}$, $6\pi+2\operatorname{arcctg}3$

975. $-2\frac{5}{9}$. **976.** −7. **977.** 0; 4,5. **978.** $-6;\frac{1}{3}$. **979.** 1. **980.** Нет решений.

981. $\left(50\pm 25\sqrt{3};\frac{10\pm 5\sqrt{3}}{2}\right)$. **982.** $-\frac{9}{13}+\frac{\pi k}{13}$, $\frac{18}{13}-\frac{2\pi k}{13}$, $k\geqslant 1, k\in Z$.

983. $\left(\frac{-13+3\sqrt{41}}{10};\frac{-11+\sqrt{41}}{10}\right)$. **984.** $\left(-3-2\sqrt{7};8+4\sqrt{7}\right)$. **985.** (3; 4), (11; 16). **986.** (5; 0,5). **987.** (1; −2). **988.** (−5; −3). **989.** (−8; −13).

990. $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$. **991.** $\frac{7\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$. **992.** ±1. **993.** 19.

994. $-\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$. **995.** $(4;\log_2 15)$. **996.** (1; −2). **997.** $5;-\frac{16}{3}$.

998. 105. **999.** (9; 2). **1000.** (8; 3). **1001.** $\left(2, \frac{1}{16}\right)$. **1002.** $\left(\frac{2}{3}; (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n\right)$.

1003. (2; 3), (3; 2). **1004.** (2; 4), (4; 2). **1005.** $\left(-\frac{1}{2}; (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n\right), n \in Z$.

1006. $\left(\frac{1}{2}; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in Z$. **1007.** (−0,25; −9); (−2,25; −1).

1008. $\left(-9; -\frac{4}{9}\right)$; (−4; −1). **1009.** $\left(1; (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right)$.

1010. $\left(\frac{1}{2}; \pm\frac{\pi}{6} + \pi n\right)$. **1011.** $\left(\pm\arccos\frac{1}{36} + 2\pi n; \frac{1}{36}\right), n \in Z$.

1012. $\left((-1)^n \arcsin\frac{1}{64} + \pi n; \frac{1}{64}\right), n \in Z$.

1013. $\left(\pm\arccos\frac{1}{25} + 2\pi n; \frac{1}{25}\right), n \in Z$.

1014. $\left((-1)^n \arcsin\frac{4}{9} + \pi n; -\frac{4}{9}\right), n \in Z$.

1015. $\left((-1)^n \arcsin\frac{4}{9} + \pi n; -\frac{4}{9}\right), n \in Z$.

1016. $\left(\pm\arccos\frac{1}{e} + 2\pi n; -\frac{3}{2e}\right), n \in Z$.

1017. $\left((-1)^{n+1} \arcsin\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6}\right), n \in Z$. **1018.** $\left(\pm\arccos\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4}\right)$, $n \in Z$. **1019.** $\pm\frac{3}{2}$; 1. **1020.** ±2; 1. **1021.** $\left(\frac{1}{2}; (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n\right), n \in Z$.

1022. $\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{1}{2}\right), n \in Z$. **1023.** 9; $\frac{1}{27}$. **1024.** 4; $\frac{1}{4}$.

1025. $\left(0; \frac{1}{3}\right), \left(\frac{28}{11}; -\frac{35}{33}\right)$. **1026.** $\left(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right), \left(-\frac{17}{5}; -\frac{43}{15}\right)$.

1027. $\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), k, n \in Z$. **1028.** $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $k, n \in Z$. **1029.** (1; 1), $(1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$. **1030.** (3; −3). **1031.** (5; 2), (5; −2). **1032.** (3; −1), (3; 1). **1033.** $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; 2\right), k \in Z$. **1034.** $\left(3\sqrt{2}; \frac{3}{4}\pi + 2\pi k\right)$, $\left(\sqrt{2}; \frac{3}{4}\pi + 2\pi k\right), k \in Z$. **1035.** $\left(2; \frac{1}{2}\right)$. **1036.** $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

1037. $\left(1; \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{6} + 2\pi k\right), k \in Z$. **1038.** $\left(2; (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n\right), n \in Z$.

1039. $\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$. **1040.** $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.

1041. $\frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in Z$. **1042.** $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$. **1043.** 0. **1044.** 0.

1045. 515. **1046.** $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$. **1047.** $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$. **1048.** 1.

1049. -1. **1050.** $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, -\arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n, n \in Z$.

1051. $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \pm\arccos\frac{5}{6} + 2\pi k, k \in Z$. **1052.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

1053. $2\pi n, n \in Z$. **1054.** $\frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in Z$. **1055.** Решений нет.

1056. $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; \sqrt{3}\right), \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; -\sqrt{3}\right), k \in Z$.

1057. $\left((-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n; 1\right), \left((-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n; -1\right), n \in Z$. **1058.** а) $\pi + 2\pi n$, $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$; б) $-3\pi; -\frac{5\pi}{3}$. **1059.** а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$; б) $\frac{19\pi}{6}$.

1060. а) $\pm\frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}\pi n, n \in Z$; б) $\frac{8\pi}{15}, \frac{2\pi}{3}, \frac{14\pi}{15}$. **1061.** а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; б) $\frac{43\pi}{18}$. **1062.** $2\pi - \arcsin\frac{1}{4}; \frac{13\pi}{6}; \frac{3\pi + 2}{2}$.

1063. а) $8; 3\pi - \arccos\frac{1}{5}; \pm\arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi k, 2\pi k, k \in Z, k > 1$

б) $8; 3\pi - \arccos\frac{1}{5}$. **1064.** а) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, (-1)^k\arcsin\frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$;

б) $\frac{7\pi}{2}, 3\pi - \arcsin\frac{1}{3}$. **1065.** а) $2\pi k, \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$; б) $4\pi, \frac{14\pi}{3}$.

1066. а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{12} + \pi k, \frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in Z$; б) $-\frac{11\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}$.

1067. а) $\frac{\pi k}{3}, k \in Z$; б) $-\pi, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$. **1068.** $\operatorname{arctg} 3$. **1069.** $45°$.

1070. $\frac{\pi}{6}$. **1071.** $\frac{2}{3}$. **1072.** $\sqrt{\frac{14}{23}}$. **1073.** $60°$. **1074.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **1075.** $2\sqrt{2}$.

1076. $\arccos 0{,}6$. **1077.** 1. **1078.** 9. **1079.** $30°$. **1080.** $45°$. **1081.** $\arccos\frac{17}{35}$.

1082. $2\sqrt{22}$. **1083.** $\arccos\frac{17}{19}$. **1084.** $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **1085.** $8\sqrt{3}; 16\sqrt{3}$.

1086. $\frac{32\sqrt{2}}{3}; \frac{64\sqrt{2}}{3}$. **1087.** 2. **1088.** 12. **1089.** $\arccos\frac{\sqrt{7}}{14}$.

1090. $\pi - \arccos\frac{1}{3}$. **1091.** 0,5. **1092.** $2\sqrt{2}$. **1093.** 1,5. **1094.** 12. **1095.** 1.

1096. $2\sqrt{6}$. **1097.** $3\sqrt{11}$. **1098.** $\operatorname{arctg}\frac{16}{15}$. **1099.** $\operatorname{arctg} 3{,}75$. **1100.** 4.

1101. 40. **1102.** $\frac{\pi}{4}$. **1103.** $\frac{\pi}{3}$. **1104.** $\frac{\pi}{6}$. **1105.** 30. **1106.** 108. **1107.** 3,5.

1108. 5. **1109.** $\frac{5\sqrt{7}}{2}$. **1110.** $\frac{7\sqrt{7}}{2}$. **1111.** 12. **1112.** $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **1113.** $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

1114. $\frac{\sqrt{57}}{12}$. **1115.** $\frac{13}{5\sqrt{17}}$. **1116.** $\frac{71}{13\sqrt{89}}$. **1117.** $\arccos 0{,}125$. **1118.** $\frac{\sqrt{33}}{6}$.

1119. 10,5. **1120.** $\arccos\frac{3\sqrt{61}}{61}$. **1121.** $\operatorname{arctg}\frac{40}{73}$. **1122.** $\frac{\sqrt{2}}{9}$. **1123.** $\frac{9}{\sqrt{555}}$.

1124. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **1125.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$. **1126.** $9\sqrt{3}$. **1127.** $4\sqrt{3}$. **1128.** 54. **1129.** 180.

1130. 60. **1131.** 1,25. **1132.** 20,8. **1133.** $2\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **1134.** $2\arcsin\frac{5}{\sqrt{41}}$.

1135. $\frac{5}{12}$. **1136.** 9. **1137.** $60°$. **1138.** $60°$. **1139.** $30°$. **1140.** $\frac{10}{\sqrt{\pi}}$. **1141.** 100π.

1142. $\arccos\frac{1}{3}$. **1143.** $\frac{\pi}{3}$. **1144.** $\arccos\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$. **1145.** $\cos\frac{11\pi}{24}; \cos\frac{23\pi}{24};$
$\cos\frac{7\pi}{24}; \cos\frac{19\pi}{24}$. **1146.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}; \sin\frac{\pi}{12}; \sin\frac{5\pi}{12}$. **1147.** $9; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$. **1148.** $-1; 0;$
$6; 2\pi$. **1149.** $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup [0; 1]$. **1150.** $\left(-\frac{4}{3}; -1\right) \cup \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2)$.

1151. $\left(0; \frac{1}{27}\right) \cup \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}; 1\right) \cup (1; 9]$. **1152.** $(2; 9) \cup (27; +\infty)$.

1153. $(-4; -3) \cup \{-2{,}5\} \cup (-2; -1)$. **1154.** 0,5. **1155.** $(3; 6)$.

1156. $(15; +\infty)$. **1157.** $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$. **1158.** $\left(\frac{1}{7}; 7\right)$.

1159. $x \in [-3\sqrt{3}; -1) \cup \left(-\frac{1}{27}; 0\right)$. **1160.** $x \in [-4; -1) \cup \left(-\frac{1}{4}; 0\right)$.

1161. $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$. **1162.** $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

1163. $[-16; -1) \bigcup \left(-\frac{1}{256}; 0\right)$. **1164.** $(-4; -1) \cup \left(-\frac{1}{16}; 0\right)$.

1165. $\sqrt{\log_2 \frac{34}{9}} \leqslant |x| \leqslant \sqrt{\log_2 \frac{30}{7}}$, $|x| \neq \sqrt{2}$. **1166.** Нет решений.

1167. $\left(8; 8\frac{1}{25}\right] \cup [633; +\infty)$. **1168.** $\left(2; 2\frac{1}{27}\right] \cup [5; +\infty)$. **1169.** $[0; 4)$.

1170. $[0; 9)$. **1171.** $(1; 3) \cup (3; 5)$. **1172.** $(-2; -1) \cup (-1; 0)$.

1173. $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **1174.** $(0;\ 0{,}8] \cup \{2\}$. **1175.** $[1{,}5; +\infty)$. **1176.** $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right]$.

1177. $\left[-\frac{22}{3}; -2\right) \cup (-1; 0]$. **1178.** $\left[-\frac{17}{8}; -1\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right]$. **1179.** Нет решений. **1180.** 0. **1181.** $[-13; -2) \cup (3; 9]$. **1182.** $[-14; -5) \cup (2; 4]$.

1183. $(-1; 0) \cup (5; +\infty)$. **1184.** $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup \{2{,}5\} \cup (4; 5) \cup (5; 6)$.

1185. $\left(\frac{1}{35}; \frac{26}{35}\right]$. **1186.** $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right]$. **1187.** $(-\infty; 2] \cup [3; 4)$. **1188.** $[3; 4)$.

1189. $\left(5, \frac{9+\sqrt{33}}{2}\right)$. **1190.** $(2; +\infty)$. **1191.** $(2; \sqrt{5}) \cup (3; +\infty)$.

1192. $(3; \sqrt{10}) \cup (4; +\infty)$. **1193.** $(0{,}5; 1) \cup (1; 3]$. **1194.** $(-2; -1) \cup (-1; 1]$.

1195. $x \in [-2; 0] \cup [2; +\infty)$. **1196.** $(-\infty; 2]$. **1197.** $x > 3$. **1198.** $3 < x < 9$.

1199. $\left[2^{-\sqrt{5}-1}; \frac{1}{8}\right] \cup \left[2; 2^{\sqrt{5}-1}\right]$. **1200.** $\left[3^{\frac{-3-\sqrt{29}}{2}}; \frac{1}{81}\right] \bigcup \left[3; 3^{\frac{-3+\sqrt{29}}{2}}\right]$.

1201. $x \in (-\infty; -\sqrt{\log_{4,5} 2}) \bigcup (\sqrt{\log_{4,5} 2}; +\infty)$. **1202.** $[0; 4)$.

1203. $(-2; 11)$. **1204.** $[-4;\ \log_2 25]$. **1205.** $[-\sqrt{7};\ \log_2 5]$.

1206. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt[11]{3^9}}\right] \cup (1; 9]$. **1207.** $(-0{,}5; 0) \cup [1; 1{,}5] \cup (2; 2{,}5)$.

1208. $[1{,}5; 2) \cup (4; 3+\sqrt{3}]$. **1209.** $(-\infty; -\log_3 4) \cup \left(-\frac{1}{2}\log_4 3; 0\right)$.

1210. $[\log_3 4; \sqrt{2}]$. **1211.** $(\sqrt{6}; \log_2 6)$. **1212.** $(-\infty; -1) \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$.

1213. $(-2; -1) \cup (-1; 1)$. **1214.** $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$. **1215.** Нет решений.

1216. $(-\infty; -2] \cup (0; 1]$. **1217.** $\{-1\} \cup [2; +\infty)$. **1218.** $[-1; 1) \cup (4; 6]$.

1219. $[-3;2)\cup(5;10]$. **1220.** $[-2-2\sqrt{2};-4)\cup(0;2]$.
1221. $[-4;-3)\cup(-1;-1+\sqrt{3}]$. **1222.** $(3;4)$.
1223. $[-4;0)\cup\left(0;\log_3\left(\frac{3}{2}\right)\right]\cup(1;\infty)$. **1224.** $[1;2]\cup(6;+\infty)$.
1225. $[3;4]\cup(7;25)$. **1226.** $[5;11)$. **1227.** $(-9;-7)\cup(4;8]\cup\left\{17\frac{4}{7}\right\}$.
1228. $(2;3)\cup(3;4)$. **1229.** $(1;2)\cup(2;3)$. **1230.** $[1;6]\cup[11;17]$.
1231. $[1;2]\cup[3;9]$. **1232.** $(-6;-5)\cup[-3;0)\cup(0;2)\cup(2;5]$.
1233. $(-\infty;-5]\cup\{7\}$. **1234.** $[1;3)\cup(16;19]$.
1235. $(\log_4 11;\log_3 7)\cup(2;+\infty)$. **1236.** $[\log_4 7;3]$.
1237. $\left(0;\frac{1}{9}\right)\cup\left[2^{2\sqrt{2}};+\infty\right)$. **1238.** $\left(\frac{5}{4};\sqrt{2}\right)$. **1239.** $\left(\frac{1}{4}\operatorname{tg}1;\log_7 3\right)$.
1240. $\left(\log_5 11;\frac{3\sqrt{5}}{4}\operatorname{ctg}0{,}7\right]$. **1241.** $k=-\frac{4}{3}, x_1=\frac{\sqrt{3}}{9}, x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $k=2$, $x_1=3, x_2=9$. **1242.** $\frac{1}{5}$; $1\frac{1}{5}$. **1243.** -2. **1244.** $(-\infty;0{,}8)\cup(4;+\infty)$.
1245. -2; $-\frac{7}{4}$; -1; $\pm2\sqrt{2}$; 3. **1246.** ±6. **1247.** $a=3, b=12$.
1248. $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]\cup\{1\}$. **1249.** $\left(-2;-1\right)\cup\left(1\frac{1}{3};2\right)$. **1250.** $1{,}5\sqrt[3]{6}$.
1251. $20{,}25$. **1252.** $3-1{,}5\sqrt{2}$; $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **1253.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$; $\frac{-2-\sqrt{2}}{3}$.
1254. $[-8{,}5;+\infty)$. **1255.** $m=-1, m>-\frac{1}{2}$. **1256.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$.
1257. $(-\infty;0]\cup[10{,}125+\infty)$. **1258.** 17. **1259.** 0; 1; 2. **1260.** 0; 1; 2.
1261. $(-6;-3)\cup\left\{\frac{\sqrt{13}-5}{2}\right\}$. **1262.** $(-3;-2)\cup\left\{\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right\}$.
1263. $(-8;-6)\cup(0;2)$. **1264.** $(-9;-5)\cup(1;5)$. **1265.** $a\in[-45;39]$.
1266. $a\in[4;8]$. **1267.** $-0{,}5$; 1. **1268.** $\sqrt{2\pm\sqrt{3}}, -\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$. **1269.** $2\pm\sqrt{3}$.
1270. $\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$. **1271.** $4{,}25$; $\frac{-1+4\sqrt{3}}{2}$. **1272.** $(-\infty;-4]\cup[6;+\infty)$.
1273. $[-2{,}5;-0{,}5]$. **1274.** $p=0$; $x_1+x_2=-\frac{6}{17}$. **1275.** 2. **1276.** 2. **1277.** 2.
1278. $(1;5)$, $(3;11)$. **1279.** $(3;2)$, $(1;0)$. **1280.** $(-1;0;1)$. **1281.** $(4;3;1)$.
1282. 3. **1283.** 2. **1284.** 4. **1285.** 2. **1286.** $(-2;0)$, $(-\log_6 72;\ \log_6 3)$.
1289. 5. **1290.** $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$ $k,n\in Z$.

1291. 2. **1292.** $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{4}+2\pi n\right) n, k \in Z$. **1293.** 5. **1294.** 2.
1295. $-4;\ -1;\ 3$. **1296.** 2. **1297.** 3. **1298.** -4. **1299.** -8. **1300.** 10.
1301. -3. **1302.** $0;\ \sqrt[3]{\frac{9}{25}};\ \sqrt[3]{4}$. **1303.** $-1; 0; 1 \pm \sqrt{2}$. **1304.** $-5-\sqrt{46};$
$-5+\sqrt{46};\ 3;\ 7$. **1305.** -20. **1306.** 0. **1307.** $0;\ \frac{1}{\cos 1}$. **1308.** $0;\ 2\sqrt[3]{\cos 1}$.
1309. $\left(\frac{1}{100}; 10\sqrt{10}; 10\sqrt{10}\right), \left(10\sqrt{10}; \frac{1}{100}; 10\sqrt{10}\right), \left(10\sqrt{10}; 10\sqrt{10}; \frac{1}{100}\right)$.
1310. $-\frac{27}{2048}; 1$. **1311.** -2. **1312.** $\frac{\sin 1}{20}$. **1313.** $[1; +\infty)$. **1314.** $(0; 2]$.
1315. $[-12; -4\sqrt{2}] \cup [5\sqrt{2}; 8]$. **1316.** $(-13; -4) \cup (2; 11)$.
1317. $-12 < a < 0{,}8$. **1318.** $(-\infty; -6) \cup (0{,}4; +\infty)$.
1319. $(-3; -2) \cup (2;\ 3)$. **1320.** Таких a нет.
1321. $\left(-\infty; \frac{1}{12}\right) \cup \left(2+\frac{\sqrt{14}}{2}; +\infty\right)$. **1322.** $(-\infty; 0)$.
1323. $\sqrt{0{,}5} < |a| < \sqrt{2{,}5}$. **1324.** $(-\infty; +\infty)$. **1325.** $\left[-\frac{3}{\sqrt{2}}; 1\right) \cup \left(2; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$.
1326. $\left[-\frac{3\sqrt{3}}{2};\ 0\right]$. **1327.** $[4; +\infty)$. **1328.** $[2; +\infty)$. **1329.** $(0{,}5; 2)$.
1330. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **1331.** $\{0\} \cup \left[1;\ \log_2 \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$.
1332. $a \leqslant \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, -1 \leqslant a < 0, 0 < a \leqslant \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, a \geqslant 1$. **1333.** $a = 2$.
1334. 3. **1335.** $x = \frac{(1-2a)^2}{16a-4a^2-1}$, при $2-\sqrt{3} < a \leqslant 0{,}5$.
1336. $x = \frac{\left(1-\frac{1}{2}c\right)^2}{5c}$, при $0 < c \leqslant 2$. **1337.** $a = 8, b = -20, x = 2 \pm 2\sqrt{2}$.
1338. $a = 14;\ b = 14;\ x = -1{,}5 \pm 0{,}5\sqrt{29}$. **1339.** 2. **1340.** $-4; -5; -6$.
1341. -5. **1342.** -1. **1343.** $(-5; -1{,}5] \cup [0{,}5; 3)$.
1344. $(-3; -1-\sqrt{2}] \cup (0{,}5; 2)$. **1345.** $2; 3+\sqrt{109}$. **1346.** $6; 4+2\sqrt{41}$.
1347. $4\sqrt{2};\ 6-4\sqrt{2}; 3 \pm \sqrt{7}$. **1348.** ± 4. **1349.** $-\frac{4}{5}; -\frac{\sqrt{2}}{5}; \frac{\sqrt{2}}{5}; \frac{4}{5}$.
1350. $\pm\sqrt{2}; \pm 4$. **1351.** $4;\ 2\frac{2}{3}$. **1352.** 4. **1353.** $a \in (-1-\sqrt{17}; 6]$.

1354. $\left(-3; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \bigcup \left(\frac{-6-\sqrt{86}}{10}; 3\right]$. **1355.** При $a = 0{,}6$ $x = 3$; при $a \in (-\infty; 0{,}6) \cup (0{,}6; +\infty)$ решений нет. **1356.** $\left(-5; \frac{8-\sqrt{35}}{2}\right)$.
1357. $(-\infty; -3) \cup (-2{,}75; \sqrt{3})$. **1358.** $(-\infty; -2) \cup (-1{,}75; \sqrt{2})$.
1359. $2n + \frac{1}{2}$, где $n \in Z$. **1360.** $b = 2n$, где $n \in Z$. **1361.** 0, -1.
1362. $\frac{3\pi + 6\pi k}{13}$, $k \in Z$. **1363.** $(-2; -1)$. **1364.** $(-\infty; -1] \cup [0; 1]$.
1365. $a \in [-4; 2{,}4]$. **1366.** $a \in \left[-3; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right]$. **1367.** $(-3; +\infty)$.
1368. $(-\infty; 0{,}1\sqrt{15}) \cup (3{,}25; +\infty)$. **1369.** $\left(-\frac{13}{4}; 3\right)$. **1370.** 0. **1371.** $[3; 4)$.
1372. $(-1; 0)$. **1373.** $a \leqslant 0$, $a = 4$. **1374.** $a \geqslant 3{,}5$, $a = 0{,}5$.
1375. $\left[\frac{2-\sqrt{46}}{2}; \frac{-6+\sqrt{14}}{2}\right] \cup \left[3; \frac{2+\sqrt{46}}{2}\right]$.
1376. $\left[\frac{6-2\sqrt{209}}{5}; \frac{-9+\sqrt{17}}{2}\right] \bigcup \left[\frac{56}{17}; \frac{6+2\sqrt{209}}{5}\right]$. **1377.** $(0; 2)$.
1378. $x \in \left[\frac{9+\sqrt{97}}{2}; +\infty\right)$ при $a \in \left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right)$, $k \in Z$. **1379.** $\left[\frac{1}{4}; 4\right]$.
1380. $\left[\frac{\sqrt{2}}{32}; 16\sqrt{2}\right]$. **1381.** $(1; 2) \cup (6; 7]$. **1382.** $(7; 8]$. **1383.** $[2; 24)$. **1384.** 4.
1385. $\{5\} \cup [125; 625)$. **1386.** Таких a нет. **1387.** $(0; 0{,}5) \cup (2; 1 + \sqrt[3]{4{,}5})$.
1388. $(-\infty; 6 - 3\sqrt{3}] \cup [3; 9] \cup [6 + 3\sqrt{3}; +\infty)$.
1389. $(-8 - 7\sqrt{2}; -8 - 4\sqrt{3}) \cup (-8 + 4\sqrt{3}; -8 + 7\sqrt{2})$. **1390.** $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.
1391. $(2; 3)$. **1392.** $(0; 15)$. **1393.** $(1; 1{,}25)$. **1394.** $(2{,}4; 3]$.
1395. $\left(\frac{1-\sqrt{73}}{2}; 0\right] \cup [1; 2)$. **1396.** $\left(\frac{4}{5}; \frac{6}{5}\right]$. **1397.** $(-\infty; 1{,}5]$.
1398. $(-\infty; 0{,}9]$. **1399.** $(-\infty; 4{,}8]$. **1400.** $\left(\frac{\sqrt{21}}{9}; 1\right)$. **1401.** $4{,}5\sqrt{3}$.
1402. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1403.** $\frac{a\left(2 - \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)(2-\sqrt{3})}{2}$; $\frac{a(2\sqrt{3}-3)}{2}$.

1404. $a\sqrt{2-\sqrt{3}}$; a. **1405.** 9,6. **1406.** 50,4. **1407.** 30 или 70. **1408.** 11. **1409.** 13,5. **1410.** 20°; 90°. **1411.** 65°; 115°. **1412.** 12; 5 или $4\frac{1}{2}$; $13\frac{1}{3}$. **1413.** 12 или 5. **1414.** $\frac{225\sqrt{7}}{8}$. **1415.** 5460. **1416.** 13,5. **1417.** 110,4; $106\frac{98}{115}$. **1418.** 13 или 14. **1419.** $6\sqrt{18\pm 12\sqrt{2}}$. **1420.** $8\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$. **1421.** 13. **1422.** $\frac{288}{35}$. **1423.** $\frac{481}{40}$. **1424.** 7 : 30. **1425.** 1 : 1 : 1. **1426.** $\frac{18\sqrt{10}}{7}$ или $\frac{12\sqrt{21}}{23}$. **1427.** $4(\sqrt{3}+1)$ или $\frac{20\sqrt{3}}{3}$. **1428.** 6, $\frac{3\sqrt{6}}{2}$. **1429.** 2. **1430.** $4\sqrt{3}$; 4. **1431.** 5. **1432.** $6\sqrt{5}$. **1433.** 12,5. **1434.** $\sqrt{201}$; $\sqrt{831}$. **1435.** $\frac{2\sqrt{39}}{3}$; $\frac{2\sqrt{57}}{3}$. **1436.** $\frac{5\sqrt{6}}{9}$; $5\sqrt{6}$. **1437.** 60. **1438.** $\sqrt{22}$. **1439.** 180. **1440.** 33; 88. **1441.** 30; 195. **1442.** $2\sqrt{19}-5$; 5. **1443.** $12-\sqrt{39}$; $2+\sqrt{39}$. **1444.** 28; 70. **1445.** 55; $146\frac{2}{3}$. **1446.** 2; 3. **1447.** 1; 3. **1448.** $\frac{7}{2}(2\sqrt{3}\pm\sqrt{5})$. **1449.** 3,5; 24,5. **1450.** 18; 72. **1451.** 35. **1452.** $\sqrt{41}$; 13. **1453.** 8; 6. **1454.** $\frac{15\sqrt{3}}{7}$; $\frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. **1455.** $10\sqrt{21}$; 30. **1456.** $\frac{25\sqrt{10}}{3}$; $\frac{\sqrt{2290}}{3}$. **1457.** $\frac{\sqrt{19897}}{28}$; $\frac{\sqrt{27169}}{20}$. **1458.** $12\sqrt{3}$; $972\sqrt{3}$. **1459.** $60{,}75\sqrt{3}$; $972\sqrt{3}$. **1460.** $2+\sqrt{3}$; 2; $2-\sqrt{3}$. **1461.** 1; $\sqrt{6}-\sqrt{3}$; $\sqrt{6}+\sqrt{3}$. **1462.** $\sqrt{16\pm\sqrt{11}}$. **1463.** $\sqrt{8\pm\sqrt{19}}$. **1464.** 2,8. **1465.** 4 : 3. **1466.** 28,8. **1467.** $\sqrt{117}$. **1468.** 38,4; 56,25. **1469.** $\frac{1}{2}$; $\frac{32}{55}$. **1470.** 10; 30. **1471.** 5 или 8,5. **1472.** 44. **1473.** 4,6. **1474.** 17; 24,5. **1475.** 20; 12. **1476.** 8 или $16(2+\sqrt{3})$. **1477.** $18(\sqrt{2}-1)$ или $18(\sqrt{2}+1)$. **1478.** $\frac{92}{9\pi}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{23}$ или $\frac{368}{9\pi}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{23}$. **1479.** $\frac{16\pi}{725}\operatorname{tg}\frac{\pi}{29}$ или $\frac{16\pi}{261}\operatorname{tg}\frac{\pi}{29}$. **1480.** 3. **1481.** 2. **1482.** 3 или 21. **1483.** 2 или 14. **1484.** $2\sqrt{6}$. **1485.** $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. **1486.** $4\sqrt{3}$ или $4\sqrt{5}$. **1487.** 8. **1488.** $3\sqrt{\frac{3}{5}}$ или $3\sqrt{\frac{7}{5}}$. **1489.** $2\sqrt{7}$ или $\frac{2\sqrt{70}}{5}$. **1490.** 1600 или $19\frac{61}{81}$. **1491.** 3,5 или 10,5. **1492.** 3. **1493.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{18}$.

1494. $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $7\sqrt{3}-12$. **1495.** 40. **1496.** 3. **1497.** 15. **1498.** 19. **1499.** $\frac{5}{2}$; 2.

1500. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$. **1501.** Да. **1502.** Нет. **1503.** $-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$. **1504.** 8. **1505.** 8. **1506.** 167.

1507. 73. **1508.** 60. **1509.** Нет решений. **1510.** 0; 1. **1511.** 0; 1. **1512.** $\frac{\sqrt{85}}{2}$;

$2\sqrt{7}$; $\frac{\sqrt{145}}{2}$. **1513.** $\frac{\sqrt{1361}-1}{4}$. **1514.** $a=2$, $b=5$. **1515.** 10981. **1516.** 5.
1517. 1, 3, 5. **1518.** (6, 25). **1519.** 1987; 2005. **1520.** $a=17$, $b=34$.
1521. Нет. **1522.** 77; 86. **1523.** 642. **1524.** 3. **1525.** 3. **1526.** 376; 625.
1527. 7. **1528.** Да. **1529.** Да. **1530.** $n=2$; $n=3$. **1531.** 300 или 412.
1532. 280, 122, 244, 366, 488. **1533.** 180 625. **1534.** 145. **1535.** 1791.
1536. (117; 2), (59; 3). **1537.** 1; 3267. **1538.** 1; 12555. **1539.** 1; 2079.
1540. 1; 1827. **1541.** 1; 4725. **1542.** 1; 3375. **1543.** 0; 990. **1324.** 0; 1020.
1545. 12 800 000. **1546.** 200 000. **1547.** (7; 4); (17; 16). **1548.** (9; 2); (39; 38).
1549. 1; 6; 13. **1550.** −8; −4; −2; 2. **1551.** (−4; −3), (4; 5), (6; −5).
1552. (−6; −7), (−4; 3), (4; −5). **1553.** 183; 328; 528; 715; 999. **1554.** 205; 300; 477; 732; 997. **1555.** −7; 7. **1556.** −13; 13. **1557.** (4; −17), (4; 17), (2; 1), (2; −1). **1558.** (10; −31), (10; 31), (6; −1), (6; 1). **1559.** $k=2$; $n=4$.
1560. $k=2$; $n=4$. **1561.** 1681. **1562.** 144 400. **1563.** (−0,5; 0,5).
1564. (−1; 1). **1565.** (1; 1; 1; 1). **1566.** *а*) нет; б) да; в) 483. **1567.** 2; 3.
1568. 1; 2; 3. **1569.** Нет. **1570.** 2; 1262; 2522; 3782; 812; 2072; 3332; 4592.
1571. Нет решений. **1572.** (3, 2), (3, −2), (−3, 2), (−3, −2). **1573.** Нет решений. **1574.** 43. **1575.** 187. **1576.** $m=3, n=6, k=9$.
1577. $m=3$, $n=6$, $k=12$. **1578.** $n=12$. **1579.** а) 51; б) 71; в) 6614.
1580. а) 61; б) 48; в) 19 727. **1581.** (0; 0), (−2; 8). **1582.** (−2; 2), (0; 1), (1; −1), (3; 7), (4; 5), (6; 4). **1583.** а) да; б) 9 999 999 960, 9 999 999 961.
1584. а) 15; б) 1 и 5; в) 3. **1585.** а) 19; б) 3 и 9; в) 3. **1586.** 0. **1587.** 1584.
1588. 7056, 15 876, 86 436. **1589.** 1,2,3. **1590.** 3.

Литература

1. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2014 году Единого государственного экзамена по математике. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2013. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

2. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов Единого государственного экзамена 2014 года по математике. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2013. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

3. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (5–9 классы). Приказ Минобрнауки РФ № 1897 от 17.12.2010.

4. Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Математика. Основное общее образование; среднее (полное) общее образование. 2004 г. Приказ МО РФ № 1089 от 05.03.04.

5. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. Приказ Минобрнауки РФ № 413 от 17.05.2012.

6. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2013. — 400 с.

7. Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2014: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2013. — 240 с.

8. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014. Учебно-тренировочные тесты: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2014. — 144 с.

Готовимся к ЕГЭ

Учебное издание

Авилов Николай Иванович, **Войта** Елена Александровна,
Дерезин Святослав Викторович, **Иванов** Сергей Олегович,
Коннова Елена Генриевна, **Нужа** Галина Леонтьевна,
Ольховая Людмила Сергеевна, **Ольховой** Алексей Федорович,
Резникова Нина Михайловна, **Фридман** Елена Михайловна,
Ханин Дмитрий Игоревич

МАТЕМАТИКА
ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2015. Книга 1

Под редакцией ***Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова***

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *А. Вартанов*
Компьютерная верстка *С. Иванов*
Корректор *С. Верескун*

Подписано в печать с оригинал-макета 10.07.2014.
Формат $60x84^1/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 20,46.
Тираж 40 000 экз. Заказ № **6.**

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344082, г. Ростов-на-Дону, ул. Согласия, 7.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ООО «Полиграфобъединение»
347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6В.